

INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL

A Inteligência Artificial (IA) é uma área que disponibiliza conhecimento para construção de modelos, entre outros, de apoio à decisão e ao controle com base em fatos, conhecimentos empíricos e teóricos, mesmo que apoiados em dados incompletos ou imprecisos.

A IA está focada em três tipos de atividades (BITTENCOURT, 2001):

- ✓ Desenvolvimento de modelos formais para inteligência humana, direcionada para ciência cognitiva, também conhecida como psicologia computacional;
- ✓ Criação de aplicações educacionais, comerciais e industriais;
- ✓ Exploração e experimentação de técnicas computacionais que apresentem potencial para simulação do comportamento inteligente.

Para Russell (2013) o primeiro trabalho que trata de IA foi desenvolvido em 1943 por Warren McCulloch e Walter Pitts usando conhecimentos sobre neurônios humanos; a análise formal da lógica proposicional, onde se usam fórmulas para representarem proposições, usando conectivos lógicos e um sistema de regras; e a Teoria da computação de Turing.

Bittencourt (2001) aborda relatórios desenvolvidos pelo MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) que divide o desenvolvimento da IA segundo os objetivos e os métodos na época. As abordagens/épocas são:

- ✓ Clássica (1956¹/1970)
 - Objetivo: simular a inteligência humana;
 - Método: solucionadores gerais de problemas e lógica.
- ✓ Romântica (1970/1980)
 - Objetivo: simular a inteligência humana em situações pré-determinadas;
 - Método: formalismo de representação de conhecimento adaptado ao tipo de problema, mecanismo de ligação procedural visando maior eficiência computacional.
- ✓ Moderna (1980/1990)
 - Objetivo: simular o comportamento de um especialista humano ao resolver problemas em um domínio específico;
 - Método: sistemas de regras, representação de incertezas, conexionismo.

¹ Oficialmente a IA nasceu em 1956 com uma Conferência em Dartmouth College, nos Estados Unidos da América, onde se pretendia reunir dez homens, durante dois meses, para tratar de Inteligência Artificial.

TEORIA FUZZY

1. CONCEITOS DA TEORIA FUZZY

O sistema está *degradado*. O freio está *baixo*. A confiabilidade deste equipamento está *baixa*. Todas as frases anteriores representam as visões de alguém sobre o cotidiano, considerando uma situação analisada sob o aspecto técnico. Nota-se também que alguns termos utilizados (em itálico) são considerados vagos ou imprecisos, denotando que as respostas necessitam de uma forma de gradação que os qualifique melhor, podendo-se representar este conhecimento humano de forma científica.

De acordo com Abar (2005) as primeiras noções da lógica dos conceitos "vagos" foi desenvolvida por um lógico polonês Jan Lukasiewicz (1878-1956), em 1920, que introduziu conjuntos com graus de pertinência 0, $\frac{1}{2}$ e 1 e, mais tarde, expandiu para um número infinito de valores entre 0 e 1.

Segundo Oliveira Jr. (1999) deve-se atribuir a Bertrand Russel o início da "era *Fuzzy*", quando em 1923 publicou o artigo "*Vagueness*".

O primeiro trabalho sobre a Teoria *Fuzzy*, intitulado *Fuzzy Sets, Information and Control*, foi apresentado pelo professor da Universidade da Califórnia, Lofti A. Zadeh, na revista *Information and Control* – Volume 8, nas páginas 338 a 353, em 1965 (Tanaka, 1997 e UFBA, 2001). Zadeh acreditava que a lógica Aristotélica (Aristóteles, filósofo grego, 384-322 a.C.) sozinha, que não permitia ambiguidades, não contemplava todos os aspectos das escolhas desenvolvidas pela mente humana, permitindo a possibilidade de teoricamente as proposições não necessariamente serem, como por exemplo, totalmente pretas ou totalmente brancas, pois muitas vezes, vemos em níveis de mistura de preto com branco, ou seja, níveis de cinza.

Neste trabalho Zadeh qualifica os conjuntos *Fuzzy* e as definições matemáticas de inclusão, união, intersecção, complemento, relação e convexidade como uma derivação da lógica Booleana (George Boole, matemático e filósofo, 1815-1864). No seu trabalho posterior, em 1968, intitulado *Fuzzy Algorithms*, publicado na revista *Information and Control* - Volume 12, nas páginas 94 a 102 (USP, 2001) utiliza a Lógica *Fuzzy* para modelar como as pessoas chegam a conclusões quando as informações

disponíveis são imprecisas, incompletas e não totalmente confiáveis. Isso se dá pela interpretação da linguagem natural, por meio dos mecanismos de representação dos conjuntos *Fuzzy* e da teoria da possibilidade. (RODRIGUES *et al.*, 2004)

Na teoria tradicional dos conjuntos (conjuntos *Crisp*), um elemento pertence ou não pertence a um conjunto, denotando uma análise precisa e rígida desses elementos. Nos conjuntos *Fuzzy* permite-se avaliar o grau de pertinência de cada elemento do conjunto, isto é, identificar um número real no intervalo fechado de 0 a 1, sendo que o limite inferior impõe que o elemento não pertence ao conjunto, enquanto o limite superior indica que o elemento pertence totalmente ao conjunto.

Rheingantz (2002) verifica algumas vantagens da abordagem *Fuzzy* em relação à abordagem *crisp*:

- ✓ Devido à abordagem natural é de fácil entendimento e flexível;
- ✓ É robusta, pois tolera os dados imprecisos;
- ✓ Possibilita a modelagem de funções não lineares;
- ✓ Pode ser construída baseando-se na experiência do especialista;
- ✓ Em muitos casos, simplifica ou amplia as possibilidades e recursos dos métodos convencionais de controle.

2. CONJUNTOS FUZZY

A teoria “*Fuzzy Sets*” ou em português, Conjuntos *Fuzzy* (ou Difusos), é uma ferramenta matemática que subsidia a modelagem de problemas reais onde incertezas e imprecisões estão presentes. A lógica baseada em conjuntos difusos direciona o desenvolvimento de modelos semelhante às decisões humanas, onde a representação de conceitos vagos e imprecisos pode ser incorporada a modelos sofisticados.

Vanderlei Filho *et al.* (2002) ratificam essa visão de imprecisão qualificando essa teoria como muito simples e natural, podendo ser explicada pela seguinte afirmação: “Se não somos capazes de determinar os limites exatos da pertinência de um elemento no conjunto (sim/não), faz-se necessário buscar uma escala que permita caracterizar o seu grau neste conjunto”.

Belchior (1996) exemplifica o conceito de um conjunto *Fuzzy* citando um conjunto de pessoas "jovens": "Quando uma pessoa não é mais jovem? A definição de um conjunto *Fuzzy* pode-nos mostrar, por exemplo, que uma pessoa de 20 anos é "90 % jovem", enquanto alguém de 60 anos seria, apenas, "30 % jovem".

Segundo Belchior (1996), citando Turk (1991), qualquer representação adequada de um conjunto *Fuzzy*, para modelagem da Lógica *Fuzzy* (será tratado adiante), por exemplo, envolve o entendimento básico de cinco diferentes símbolos conceituais, relacionados entre si:

- ✓ Conjunto de elementos: como, por exemplo, um "homem" em "homens" ou um "item" em "estoque";
- ✓ Variável linguística: é um rótulo para um atributo dos elementos, como "altura de homem" ou o "nível de estoque" de uma empresa.
- ✓ Termo linguístico de uma variável linguística: corresponde a um adjetivo ou a um advérbio, em um conjunto de termos linguísticos, como "homem alto" associado com a "altura do homem" ou "estoque baixo", relacionado com possíveis "níveis de estoque" de uma empresa.
- ✓ Intervalo numérico mensurável: conhecido também como "conjunto referencial" ou "universo de discursos" para um atributo particular, de um conjunto de elementos, como, por exemplo, "[0,3] metros" para "altura de homem", ou "[250,750] unidades" para "nível de estoque".
- ✓ Atribuição numérica subjetiva ou valor de pertinência: é o grau com que um elemento pertence ao conjunto de elementos, rotulados por uma variável linguística, e identificados pelo termo linguístico. Por exemplo, o valor de pertinência dado a um "homem" em um grupo de homens por um observador, que usa o termo linguístico "alto", segundo sua visão de "altura" para homens, ou o valor de pertinência atribuído por um gerente para "estoque", através do adjetivo "baixo", englobando todos os níveis de estoque sob o seu gerenciamento.

A principal função de uma variável linguística é fornecer uma maneira sistemática para uma caracterização aproximada de fenômenos complexos ou mal definidos. Em essência, a utilização do tipo de descrição linguística empregada por seres humanos, e não de variáveis quantificadas, permite o tratamento de sistemas que são muito

complexos para serem analisados através de termos matemáticos convencionais. Tanscheit (2002)

De acordo com Sandri *et al.* (1999) e Ortega (2001) uma variável linguística pode ser definida por uma quádrupla $(X, U, T(X), M)$, onde X é o nome da variável, U é o universo de discurso de X , $T(X)$ é um conjunto de nomes (termos linguísticos) para valores de X , e M é uma função que associa uma função de pertinência a cada elemento de $T(X)$.

De acordo com Lee (1990), Thé (2001) e Araújo (2004), pode-se definir uma variável linguística por uma quintupla $(u, T(u), U, G, M)$, onde u é o nome da variável; $T(u)$ é o conjunto de termos ou os nomes dos valores linguísticos de u ; U é o universo de discurso onde os conjuntos são definidos; G é uma regra sintática para gerar o nome dos termos de u ; e M é uma regra semântica (característica existencial ou temática) que associa a cada termo $T(u)$ o seu significado.

Os conceitos expostos anteriormente, são a base para a formação das funções de pertinência *Fuzzy* que é definida por Shaw *et al.* (1999) como função numérica, gráfica ou tabulada, que atribui valores de pertinência *Fuzzy* para valores discretos de uma variável em seu universo de discurso. A figura 8.5 exemplifica uma função de pertinência da variável “Nível de Degradação”.

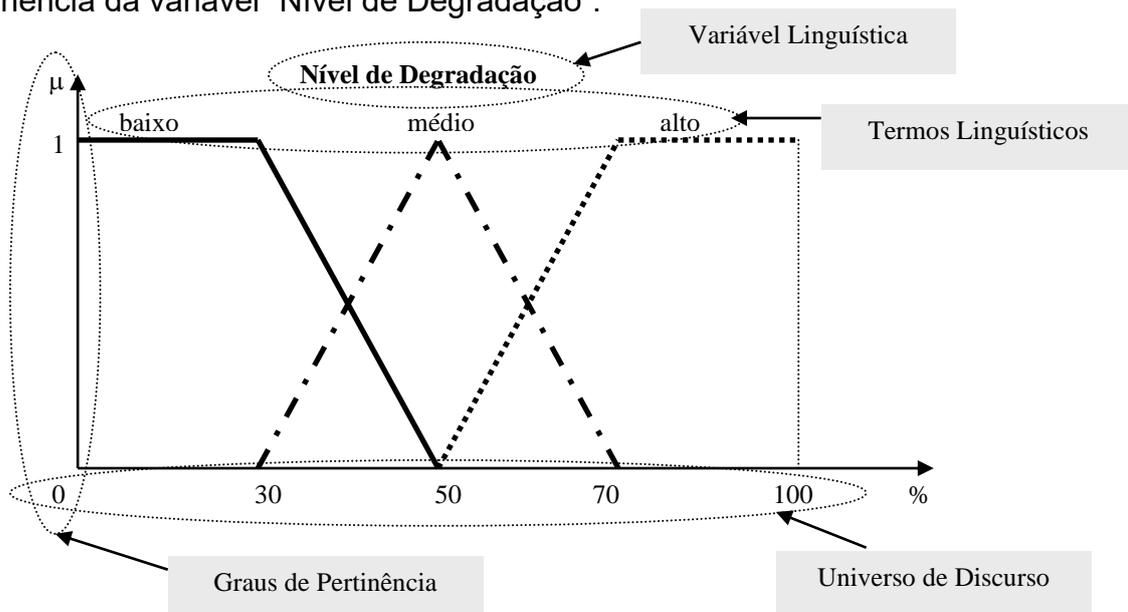


Figura 8.5 - Exemplo de Função de Pertinência – Variável “Nível de Degradação”

As variáveis linguísticas podem conter modificadores (ou *hedges*), linguísticos ou matemáticos, que alteram seu valor intrínseco. Eles antecedem a uma variável linguística originando outra variável linguística. Permitem atuar sobre a função de pertinência de um conjunto *Fuzzy* com o objetivo de modificá-la, intensificando-a (p.e. muito), diluindo-a (p.e. pouco), aproximando-a (p.e. aproximadamente), restringindo-a (p.e. abaixo de).

Os modificadores mais utilizados são:

- ✓ Muito: $(\mu_{A(x)})^2$
- ✓ Extremamente: $(\mu_{A(x)})^3$
- ✓ Um pouco: $\sqrt{\mu_{A(x)}}$
- ✓ Levemente: $\sqrt[3]{\mu_{A(x)}}$

Uma variável linguística pode conter conectivos “e” e “ou” que podem ser aplicados para formar outra variável de sentido linguístico diferente. Exemplificando, uma variável linguística “comprimento” pode ser expressa por “não muito alto” e “não muito baixo”.

Um dos problemas da aplicação da Teoria *Fuzzy* para modelagem de problemas reais é a determinação dos valores discretos para formação do universo de discurso, utilizados como entrada para definição das funções de pertinência. Turksen (1984) *apud* Silva (2005) e Ferreira *et al.* (2002) expõem as seguintes instruções para definição desses valores discretos:

1. Avaliação e Extração Subjetiva da Informação: podem-se definir os valores ou funções baseando-se nas experiências do próprio especialista.
2. Formas *ad-hoc*: quando as variações possíveis são inviáveis para uma determinação coerente, utiliza-se, por exemplo, o valor central e os valores das extremidades.
3. Conversão de Frequências ou Probabilidades: podem-se utilizar dados de histogramas ou de curvas de probabilidades para a construção das funções.
4. Aprendendo e Adaptando: consiste em avaliar os resultados obtidos e ajustar ou modificar os modelos utilizados.

Para se exemplificar, citando exemplo adaptado de Li and Yen (1995), que determina um universo de discurso $U = [0-100]$ para representar a idade de um indivíduo. Foram

Engenharia de Produção
INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL APLICADA À ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

pesquisadas entre 129 pessoas qual era a faixa de idade que se qualificava “homem jovem”, chegando-se aos seguintes resultados:

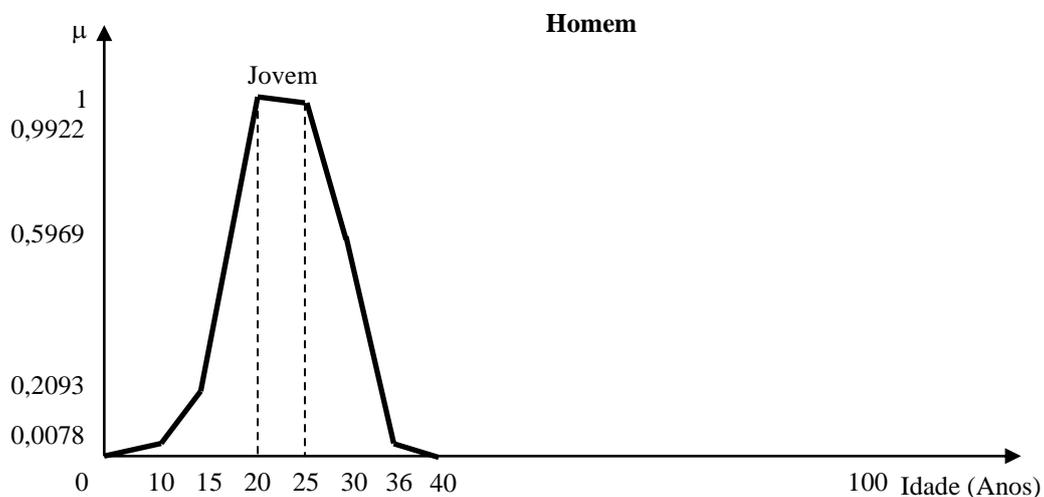
18-25	17-30	17-28	18-25	16-35	14-25	18-30	18-35	18-35	16-25
15-30	18-35	17-30	18-25	10-25	18-35	20-30	18-30	16-30	20-35
18-30	18-30	15-25	18-30	15-25	16-28	16-30	18-30	16-30	18-35
18-25	18-25	16-28	18-30	16-30	16-28	18-35	18-35	17-27	16-28
15-28	16-30	19-28	15-30	15-26	17-25	15-36	18-30	17-30	18-35
16-35	15-25	15-25	18-28	16-30	15-28	18-35	18-30	17-28	18-35
15-28	18-30	15-25	15-25	18-30	16-24	15-25	16-32	15-27	18-35
16-25	18-28	16-28	18-30	18-35	18-30	18-30	17-30	18-30	18-35
16-30	18-35	17-25	15-30	18-25	17-30	14-25	18-26	18-29	18-35
18-28	18-30	18-25	16-35	17-29	18-25	17-30	16-28	18-30	16-28
15-30	15-35	18-30	20-30	20-30	16-25	17-30	15-30	18-30	16-30
18-28	18-35	16-30	15-30	18-35	18-35	18-30	17-30	18-35	17-30
15-25	18-35	15-30	15-25	15-30	18-30	17-25	18-29	18-28	-

Tomar-se-á o menor valor da amostra (10) e o maior valor (36) como extremos da função de pertinência. Para cada cinco anos ter-se-á o seguinte universo de discurso discreto: $U = \{10, 15, 20, 25, 30, 36\}$.

As frequências de cada valor do universo de discurso estão expostas adiante.

Valores de U	Frequência	Frequência Relativa
10	1	0,0078
15	27	0,2093
20	129	1,0000
25	128	0,9922
30	77	0,5969
36	1	0,0078

Assim, o conjunto *Fuzzy* “homem jovem” apresenta na figura seguinte a função de pertinência.



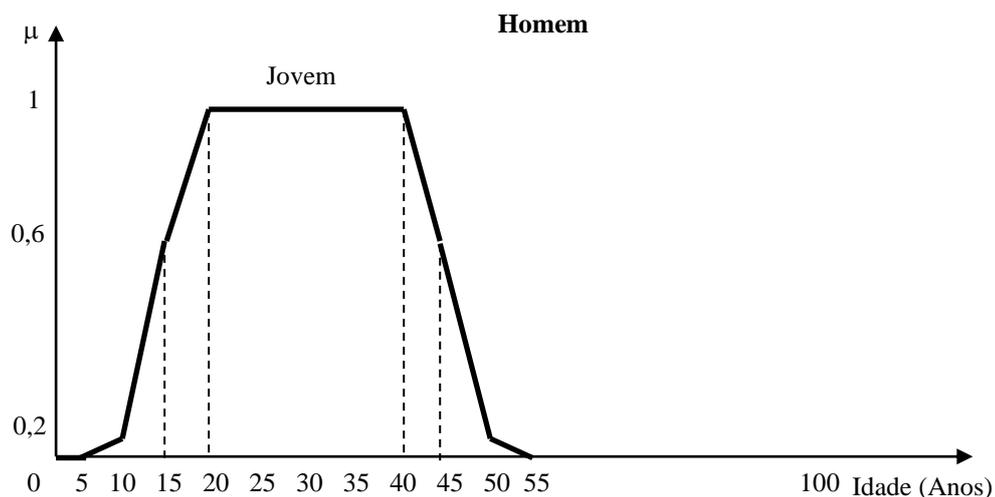
Engenharia de Produção

INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL APLICADA À ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Outro exemplo que permite enquadrar os termos linguísticos ao universo de discurso definido pode ser observado a seguir. Considerando-se o mesmo universo de discurso anterior, onde a idade está separada por períodos de cinco anos, cada especialista deve opinar sobre os valores a enquadrar. Toma-se então, para análise, o termo linguístico “jovem” para a variável “homem”. O resultado para cinco especialistas está expresso na próxima tabela.

Respostas	Idade (anos) para jovem																			
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
Resp.1			x	x	x	x	x	x	x	x										
Resp.2		x	x	x	x	x	x	x	x											
Resp.3				x	x	x	x	x												
Resp.4				x	x	x	x	x	x											
Resp.5			x	x	x	x	x	x												
Freq.	0	1	3	5	5	5	5	5	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Freq.Relat.	0	0,2	0,6	1	1	1	1	1	0,6	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

O gráfico a seguir denota a função de pertinência para essa análise.



Outra observação sobre as funções de pertinência é feita por Oliveira Jr. (1999). Ele ressalta que se deve ter atenção especial quanto ao número de termos linguísticos pois, um número excessivo pode provocar confusão quanto à classificação dos valores *crisp* e se a quantidade for insuficiente, perde-se a precisão do modelo. Quanto a isto, Shaw *et al.* (1999) citam que a quantidade ideal deverá estar entre dois e sete termos linguísticos. Acima de sete, aumenta-se a precisão e a demanda computacional, mas perde-se em compreensão.

Um dos primeiros fundamentos da Teoria *Fuzzy* é a distinção entre os modelos de probabilidade, que utilizam funções de distribuição de probabilidade de uma variável X ,

sobre um domínio D , que atribui a cada valor $d \in D$ um valor entre 0 e 1, indicando a probabilidade de X ser igual a d . Nesta situação a dúvida paira sobre a ocorrência do evento. Mas, uma vez que o evento ocorreu não existirá mais dúvida alguma. Por exemplo, pergunta-se: qual a probabilidade de se sortear uma bola vermelha em um pote com vermelhas e verdes? Supondo, 40%! Entretanto, uma vez sorteada a bola não há nada mais a fazer, ou seja, a bola será verde ou vermelha, e a incerteza desaparecerá. Nestes casos, a soma das probabilidades deve ser igual a 1 (ao contrário dos modelos baseados em funções de distribuição de possibilidade).

Os modelos baseados em possibilidade utilizam-se da Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*. São aqueles onde cada elemento tem associado um valor no intervalo de 0 a 1, indicando o seu peso ou grau de pertinência ao conjunto.

Sendo assim, Probabilidade pode ser considerada como a “chance” de que um elemento pertença a um conjunto; e Possibilidade, expressa o grau em que o elemento é membro de um conjunto.

Por exemplo, o sistema meteorológico classificou que amanhã haverá chance de chuva de 0,9. Isto significa que a probabilidade de chuva é de 90%. Porém não se indica o grau, a qualidade ou a força da chuva. Por isso diz que há possibilidade de chuva segundo a seguinte classificação: 1,0 indica tempestade; 0,8, chuva forte; 0,6, chuva intermitente; 0,4, garoa; e 0,2, chuva fina. Analisando-se isso, se diz que há possibilidade de chuva de 0,4, isto é, poderá haver garoa.

O uso de Conjuntos *Fuzzy* presta-se a dois propósitos diferentes, ainda que complementares: representar conceitos mal definidos em termos de relações difusas, onde as tuplas (lista ordenada) têm um peso que indique o grau de pertinência à relação e representar informações incompletas dentro das próprias tuplas. Neste último caso, os domínios são conjuntos *Fuzzy* e, assim, os valores dos atributos podem ser simples (sem incerteza), nulos, difusos ou ainda conjuntos ou intervalos. BOULLOSA *et al.* (1999)

Formalmente, um conjunto *Fuzzy* "A", definido no universo de discurso "X", é caracterizado por uma função de pertinência " μ_A ", a qual mapeia os elementos de "X" para o intervalo [0, 1], ou seja, $\mu_A: X \Rightarrow [0, 1]$

Um conjunto da teoria clássica dos conjuntos pode ser considerado como um conjunto *Fuzzy* específico, denominado usualmente de "*crisp*", sendo, $\mu_A: X \Rightarrow \{0, 1\}$

Pode-se também expressar o grau de pertinência como um conjunto definido por uma função (por expressão), geralmente chamada de Função Característica que declara quais elementos de x (elementos do universo de discurso), são membros do conjunto e quais não são. Por exemplo:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Sendo assim, a função de pertinência associa com cada elemento "x" pertencente a "U" um número real " $\mu_A(x)$ " no intervalo [0, 1], que representa o grau de possibilidade (ou grau de pertinência) de que o elemento "x" venha a pertencer ao conjunto "A", isto é, o quanto é possível para o elemento "x" pertencer ao conjunto "A". Se $\mu_A(x) = 0$, então "x" não é compatível com o conjunto "A" e se $\mu_A(x) = 1$, então "x" é totalmente compatível com o conjunto "A".

O grau de pertinência $\mu_A(x_i)$ indica o quanto o elemento " x_i " pertence ao conjunto *Fuzzy* A. Sendo assim, pode-se representar esse conjunto por pares ordenados de um elemento genérico "x" e seu grau de pertinência $\mu_A(x)$ da seguinte forma:

$$A = \{x, \mu_A(x) \mid x \in U\}$$

Outra forma de representação para o conjunto *Fuzzy* A discreto:

$$A = \{\mu_A(x_1) / x_1, \mu_A(x_2) / x_2, \dots, \mu_A(x_n) / x_n\}$$

Onde o símbolo "/" é apenas um separador.

Quando o universo de discurso U for discreto, o conjunto *Fuzzy* A é também escrito como: $A = \sum_{x \in U} \mu_A(x) / x = \mu_A(x_1) / x_1 + \mu_A(x_2) / x_2 + \dots + \mu_A(x_n) / x_n$

Quando o universo de discurso U for contínuo, o conjunto *Fuzzy* A é expresso como:

$$A = \int_{x \in U} \mu_A(x) / x$$

Observando-se que os símbolos “ Σ ” e “ \int ” são usados para representar a operação de união lógica e, portanto, não representam os operadores de somatório e de integração no senso do uso comum.

De acordo com Souza (1999), as formas das funções de pertinência mais utilizadas são:

- ✓ Linear por partes - Triangular: facilita a implementação de aplicativos computacionais. É descrita pelas variáveis SL, C e SR (*Spread Left, Center e Spread Right*), sendo:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \frac{x - SL}{C - SL} & , \text{ para } SL \leq x \leq C; \\ \mu(x) &= \frac{x - SR}{C - SR} & , \text{ para } C \leq x \leq SR \text{ e;} \\ \mu(x) &= 0 & \text{ caso contrário.} \end{aligned}$$

A figura 2 exemplifica este tipo de função de pertinência, considerando as suas variáveis descritivas.

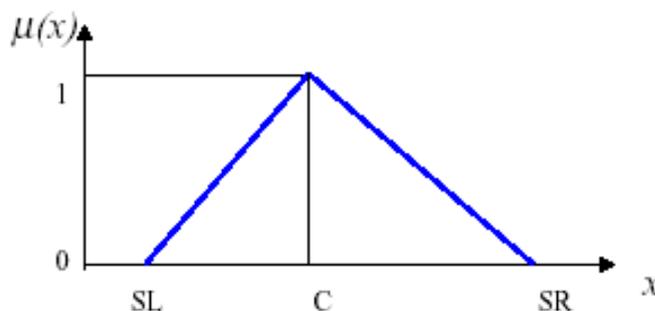


Figura 2 - Exemplo de Função de Pertinência Triangular
Fonte: Souza (1999)

- ✓ Linear por partes - Trapezoidal: também é de fácil implementação em aplicativos computacionais. É descrita pelas variáveis a , b , c e d que regulam a inclinação das bordas, sendo:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 1 - \frac{(b-x)}{(b-a)}, & a < x \leq b \\ 1, & b < x \leq c \\ \frac{(d-x)}{(d-c)}, & c < x \leq d \\ 0, & x > d \end{cases}$$

A figura 3 exemplifica o tipo de função de pertinência trapezoidal.

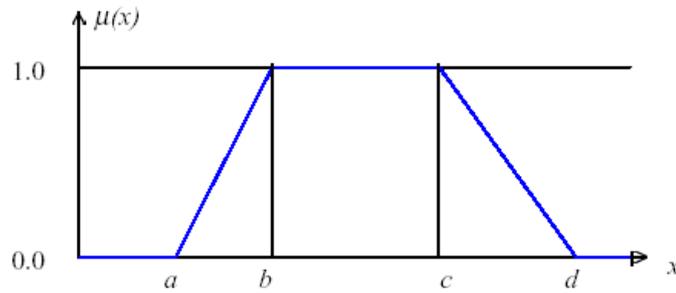


Figura 3 - Exemplo de Função de Pertinência Trapezoidal

Fonte: Souza (1999)

- ✓ Gaussiana: esta forma é descrita pela expressão a seguir, sendo m a média e v o desvio padrão. A figura 4 exemplifica este tipo de função de pertinência.

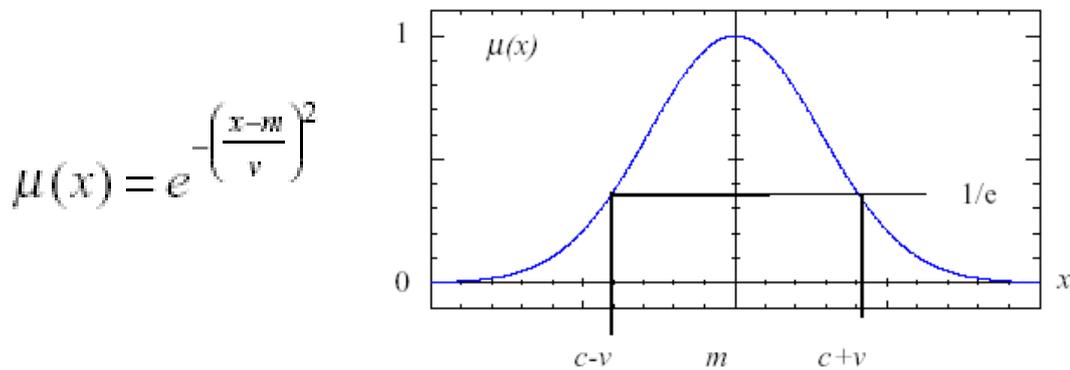


Figura 4 - Exemplo de Função de Pertinência Gaussiana

Fonte: Souza (1999)

- ✓ Sino: esta forma é descrita pela expressão a seguir, sendo c o centro da função de pertinência, a é a largura e b a sua atenuação. A figura 5 exemplifica este tipo de função de pertinência.

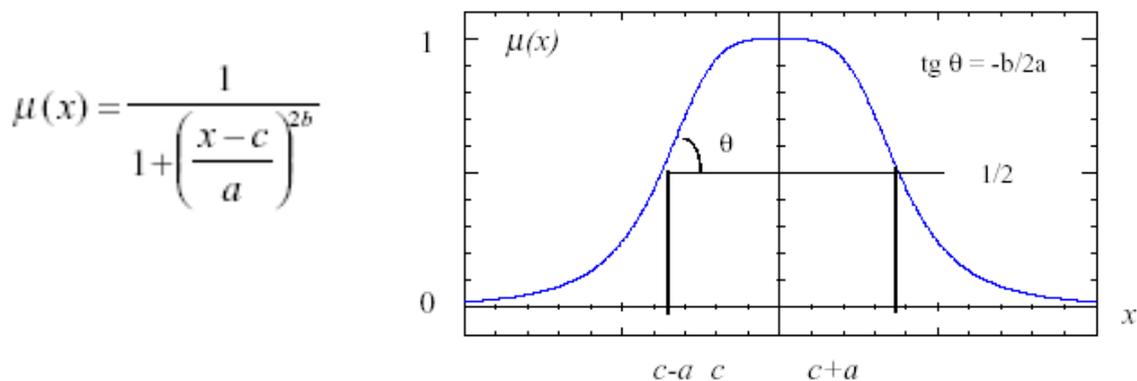


Figura 5 - Exemplo de Função de Pertinência Sino

Fonte: Souza (1999)

- ✓ Sigmoidal: as funções de pertinência desta forma têm um perfil monotônico. As variáveis que as definem são a , que representa o grau de nebulosidade e b que define o ponto de transição. A figura 6 exemplifica este tipo de função de pertinência. Ela é definida pela expressão:

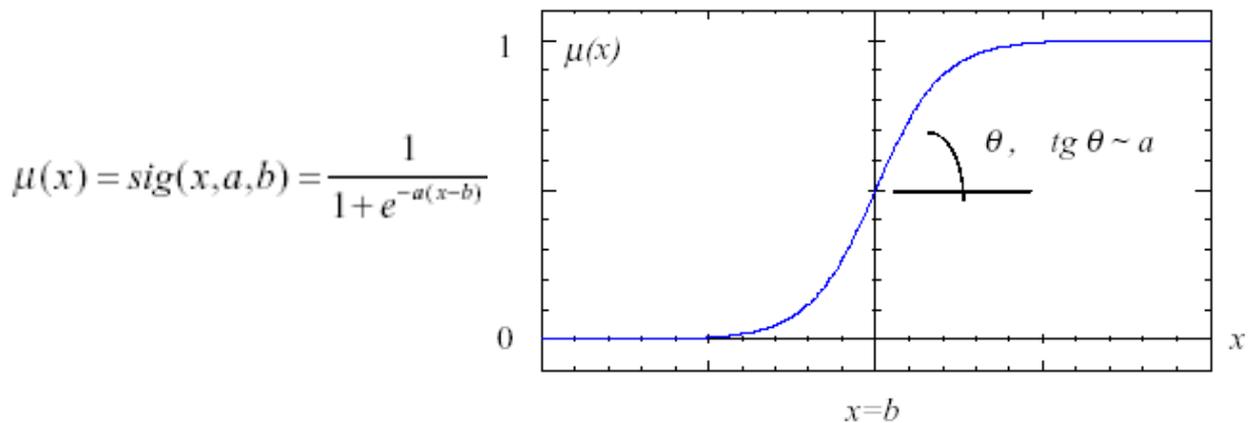


Figura 6 - Exemplo de Função de Pertinência Sigmoidal

Fonte: Souza (1999)

- ✓ Conjunto Singleton: é chamado de singleton (Figura 7) quando for representado por um único valor no universo de discurso (a) com de grau de pertinência igual a 1 ($\mu(x) = 1$).

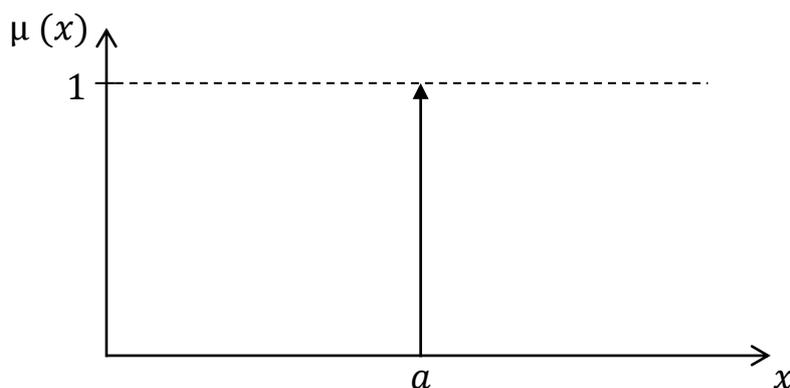


Figura 7 - Exemplo de Função Singleton

Barbalho (2001) ressalta que, em princípio, qualquer função que mapeie um universo no intervalo $[0,1]$ pode ser utilizada como função de pertinência, mas ele destaca que ainda há muita controvérsia sobre qual forma de função de pertinência é mais adequada para cada tipo de problema. Na prática, entretanto, as formas triangular e

trapezoidal, pela simplicidade de representação e pela rapidez na implementação computacional, são as mais frequentemente utilizadas.

Devem-se definir ainda alguns conceitos quanto aos conjuntos *Fuzzy*:

- ✓ Conjunto Vazio: um conjunto *Fuzzy* A é vazio, ou seja, $A = \emptyset$, se e somente se $\mu_A(x) = 0, \forall x \in X$.
- ✓ Complemento: um conjunto *Fuzzy* A é complementar quando $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in X$.
- ✓ Conjuntos iguais: dois conjuntos *Fuzzy* A e B são iguais, ou seja, $A = B$, se e somente se $\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X$.
- ✓ Subconjuntos: um conjunto *Fuzzy* A está contido em outro conjunto *Fuzzy* B , ou seja, $A \subset B$, se e somente se $\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in X$.
- ✓ Altura do conjunto A : é o maior grau de pertinência dos elementos de A dada por $\text{alt}(A) = \max \{A(x): x \in A\}$.
- ✓ Conjunto Normal: um conjunto *Fuzzy* A é normal quando existe pelo menos um x , tal que $A(x) = 1$; caso contrário o conjunto é denominado subnormal. Segundo Oliveira Jr. (1999) é essencial para a modelagem de conjuntos difusos que eles estejam normalizados, necessitando-se para isso mudar-se de escala de modo que a altura do conjunto seja 1 ($\text{alt}(A) = 1$). Um Conjunto *Fuzzy* não normalizado pode ser normalizado por meio da divisão dos graus de pertinência de cada elemento, pelo maior grau de pertinência encontrado no conjunto.
- ✓ Produto: o produto de dois conjuntos *Fuzzy* A e B , ambos em X , é definido como $\mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \forall x \in X$

Pode-se, também, adequar o universo de discurso, de vários conjuntos *Fuzzy*, para um padrão determinado, similar com o que é feito com a normalização dos graus de pertinência. Por exemplo, considerando-se que $U1 = (0; 12; 44; 67; 131)$ e $U2 = (0; 20; 40; 60; 80)$, sendo o padrão, pode-se adequar $U1$ como $U1'$ utilizando regra de três simples. O novo universo de discurso será $U1' = (0; 7,33; 26,87; 40,92; 80)$.

Podem-se efetuar operações entre conjuntos *Fuzzy*, onde se destacam-se as seguintes operações:

Engenharia de Produção
INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL APLICADA À ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

> A “união” de dois conjuntos *Fuzzy* é feita por uma família de operadores denominados t-conormas. Por exemplo, tomando-se dois conjuntos *Fuzzy* A e B, a união deles é um conjunto *Fuzzy* $A \cup B$, tal que para todo $x \in U$,

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max [\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \text{ ou } A \cup B = \int_U [\mu_A(x) \vee \mu_B(x)] / x$$

> A “interseção” de dois conjuntos *Fuzzy* é feita por uma família de operadores denominados t-normas. Por exemplo, tomando-se dois conjuntos *Fuzzy* A e B, a interseção deles é um conjunto *Fuzzy* $A \cap B$, tal que para todo $x \in U$,

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min [\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \text{ ou } A \cap B = \int_U [\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)] / x$$

Considerar $X = \{a, b, c, d, e\}$; $A = \{1/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.9/e\}$ e

$B = \{0.2/a, 0.9/b, 0.4/c, 1/d, 0.4/e\}$, então:

Conjunto $C = A \cup B$: $C = \{1/a, 0.9/b, 0.4/c, 1/d, 0.9/e\}$

Interseção $D = A \cap B$: $D = \{0.2/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.4/e\}$

Aproveitando o exemplo, a seguir são apresentadas outras formas de representar conjuntos *Fuzzy*:

Zadeh: $A = \{(a; 1), (b; 0,7), (c; 0,3), (d, 0), (e, 0,9)\}$

Ross: $A = \left\{ \frac{1}{a} + \frac{0,7}{b} + \frac{0,3}{c} + \frac{0}{d} + \frac{0,9}{e} \right\}$

Um exemplo de união e interseção na forma gráfica pode ser visualizado na figura 7 a seguir.

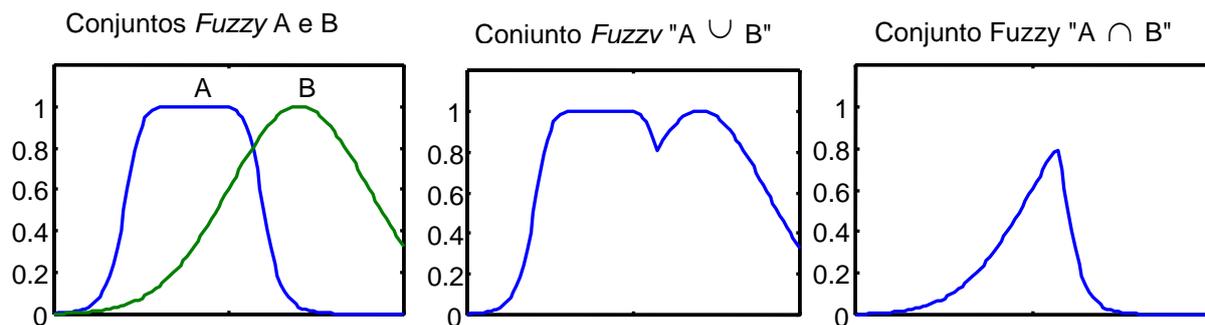


Figura 7 – Operação de união e interseção

Existem algumas propriedades algébricas que utilizam definições de interseção, união e complemento. São elas:

Involução: $(A')' = A$

Idempotência: $A \cap A = A$; $A \cup A = A$

Engenharia de Produção

INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL APLICADA À ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Comutativa: $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$

Associativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Distributividade: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Absorção: $A \cap (A \cup B) = A$; $A \cup (A \cap B) = A$

Lei Transitiva: se $A \subset B$ e $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

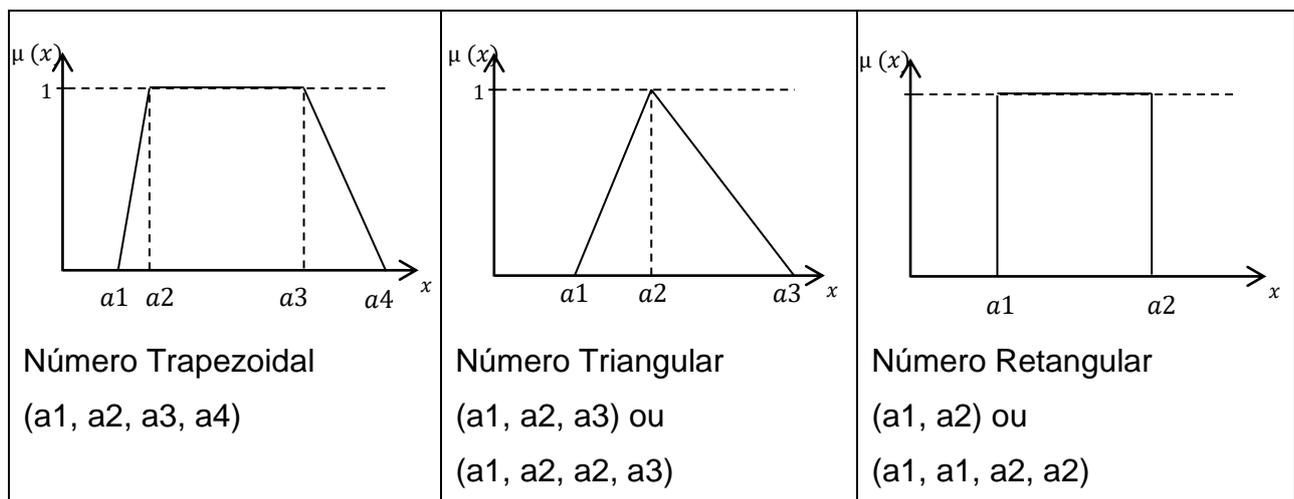
Leis de De Morgan: $(A \cap B)' = A' \cup B'$; $(A \cup B)' = A' \cap B'$

As propriedades de conjuntos clássicos $A \cap A' = \emptyset$ e $A \cup A' = X$ não se verificam para conjuntos *Fuzzy*:

$$\mu_{A \cap A'}(x) = \mu_A(x) \wedge [1 - \mu_A(x)] \neq 0 \Rightarrow A \cap A' \neq \emptyset$$

$$\mu_{A \cup A'}(x) = \mu_A(x) \vee [1 - \mu_A(x)] \neq 1 \Rightarrow A \cup A' \neq X$$

Um conjunto *Fuzzy* A , convexo, normalizado, definido em \mathfrak{R} , tal que exista pelo menos um x com relação a $\mu_A(x)=1$ e que $\mu_A(x)$ seja contínua por partes, é denominado Número *Fuzzy* e são utilizados para quantificar atributos que tenham imprecisão na forma de expressar. Os Números *Fuzzy* mais usados são triangulares, trapezoidais e retangulares. A seguir estão expressas, algebricamente e graficamente, as representações desses Números.



Considerando-se dois Números Trapezoidais *Fuzzy* $A1 = (a11, a12, a13, a14)$ e $A2 = (a21, a22, a23, a24)$, as operações aritméticas com eles podem ser definidas da seguinte forma (Macedo, 2015):

- ✓ Adição: $A1 \oplus A2 = \{a_{11}+a_{21}, a_{12}+a_{22}, a_{13}+a_{23}, a_{14}+a_{24}\}$
- ✓ Adição: $A1 \ominus A2 = \{a_{11}-a_{24}, a_{12}-a_{23}, a_{13}-a_{22}, a_{14}-a_{21}\}$
- ✓ Produto: $A1 \otimes A2 = \{a_{11} \times a_{21}, a_{12} \times a_{22}, a_{13} \times a_{23}, a_{14} \times a_{24}\}$
- ✓ Divisão: $A1 \oslash A2 = \{a_{11}/a_{24}, a_{12}/a_{23}, a_{13}/a_{22}, a_{14}/a_{21}\}$
- ✓ Produto de um escalar n : $n.A1 = (n.a_{11}, n.a_{12}, n.a_{13}, n.a_{14})$

O conceito de distância é amplamente utilizado para calcular a separação entre dois números (conjuntos) *Fuzzy*. A distância de Hamming, ou simétrica, é definida como:

$$d(A1, A2) = \sum_{i=1, x_i \in X}^n |\mu_{A1}(x_i) - \mu_{A2}(x_i)|,$$

onde X é o universo de discurso, um conjunto universal com n elementos. Toma-se também que: $d(A1, A2) \geq 0$, $d(A1, A2) = d(A2, A1)$, $d(A1, A3) \leq d(A1, A2) + d(A2, A3)$ e $d(A1, A1) = 0$.

Pode-se também avaliar a distância pelo formato Euclidiano, dada por:

$$d(A1, A2) = \sqrt{\sum_{i=1, x_i \in X}^n (\mu_{A1}(x_i) - \mu_{A2}(x_i))^2}$$

A distância de Minkowski generaliza as duas formas anteriores de medição de distância, dada por:

$$d(A1, A2) = \left(\sum_{i=1, x_i \in X}^n |\mu_{A1}(x_i) - \mu_{A2}(x_i)|^w \right)^{\frac{1}{w}},$$

onde $w \in [1, \infty]$, que quando $w = 1$ tem-se distância de Hamming e quando $w = 2$ tem-se distância Euclidiana.

Ranquear números *Fuzzy* é uma etapa muito importante quando a Teoria *Fuzzy* é utilizada na tomada de decisão e análise de dados. Para tanto é necessário que se determine um valor *crisp* que seja representativo de cada número *Fuzzy* tratado anteriormente. Os métodos mais comuns são:

- ✓ Pelo valor central: $R = \frac{a^- + a^+}{2}$ sendo a^- o valor mais à esquerda e a^+ , mais à direita;

- ✓ Pela média: $R = \frac{a1+a2+a3}{3}$ para número triangular e $R = \frac{a1+a2+a3+a4}{4}$ para número trapezoidal;
- ✓ Pela distribuição triangular (mais utilizada) Fórmula de Lazzari (1998)²: $R = \frac{a1+2a2+a3}{4}$ para número triangular e $R = \frac{a1+2\left(\frac{a2+a3}{2}\right)+a4}{4}$ para número trapezoidal;
- ✓ Pela distribuição PERT (subconjunto da distribuição Beta): $R = \frac{a1+4a2+a3}{6}$ para número triangular e $R = \frac{a1+4\left(\frac{a2+a3}{2}\right)+a4}{6}$ para número trapezoidal.

Similar as operações com números *Fuzzy*, as com intervalos *crisp* podem ser resumidas da seguinte forma, tomando-se dois conjuntos $A=(a1,a2)$ e $B=(b1,b2)$:

- ✓ Adição: $A \oplus B = (a1,a2) \oplus (b1,b2) = (a1+b1, a2+b2)$.
- ✓ Subtração: $A \ominus B = (a1,a2) \ominus (b1,b2) = (a1-b2, a2-b1)$.
- ✓ Multiplicação: $A \otimes B = (a1,a2) \otimes (b1,b2) = (a1.b1 \wedge a1.b2 \wedge a2.b1 \wedge a2.b2, a1.b1 \vee a1.b2 \vee a2.b1 \vee a2.b2)$;
 $= (\min \{a1.b1, a1.b2, a2.b1, a2.b2\}, \max \{a1.b1, a1.b2, a2.b1, a2.b2\})$.
- ✓ Divisão: $A / B = (a1,a2) / (b1,b2) = (a1/b1 \wedge a1/b2 \wedge a2/b1 \wedge a2/b2, a1/b1 \vee a1/b2 \vee a2/b1 \vee a2/b2)$;
 $= (\min \{a1/b1, a1/b2, a2/b1, a2/b2\}, \max \{a1/b1, a1/b2, a2/b1, a2/b2\})$;
- ✓ Inversa: $A^{-1} = 1/A = (a1, a2)^{-1} = (1/a1 \wedge 1/a2, 1/a1 \vee 1/a2)$
 $= (\min \{1/a1, 1/a2\}, \max \{1/a1, 1/a2\})$ excluindo o caso de $a1 = 0$ ou $a2 = 0$.
- ✓ Produto por um escalar n :
 $n \cdot A = n \cdot (a1, a2) = (na1, na2)$ tal que $n > 0$;
 $n \cdot A = n \cdot (a1, a2) = (na2, na1)$ tal que $n < 0$.

As Relações *Fuzzy* mapeiam elementos de um universo de discurso X com elementos em outro universo Y , denotando a força da relação entre os pares ordenados dos dois universos, expressando os graus de força da relação no intervalo de pertinência $[0,1]$.

Considere, por exemplo, dois conjuntos *Fuzzy* $A = \{\text{São Paulo}/a; \text{Salvador}/b; \text{Fortaleza}/c\}$ e $B = \{\text{Manaus}/d; \text{Rio de Janeiro}/e\}$, a relação $R = \text{“muito próxima”}$ está expressa adiante.

² Lazzari, L., et al. (1998). Teoría de la Decisión Fuzzy. Argentina: Ediciones Macchi.

$$R = \begin{matrix} & d & e \\ a & [0,1 & 0,8] \\ b & [0,3 & 0,5] \\ c & [0,5 & 0,3] \end{matrix}$$

Sejam R e S duas Relações *Fuzzy* nos universos de discurso X x Y. As seguintes operações são aplicáveis para os valores de pertinência para vários conjuntos de operação conforme a seguir:

$$\mu_{R \cup S}(X, Y) = \max(\mu_R(X, Y), \mu_S(X, Y))$$

$$\mu_{R \cap S}(X, Y) = \min(\mu_R(X, Y), \mu_S(X, Y))$$

$$R \subset S = \mu_R(X, Y) \leq \mu_S(X, Y)$$

$$\mu_{\bar{R}}(X, Y) = 1 - \mu_R(X, Y)$$

Tomando-se a relação R = “muito próxima” desenvolvida anteriormente pode-se expressar o complemento com \bar{R} da seguinte forma:

$$\bar{R} = \begin{matrix} & d & e \\ a & [0,9 & 0,2] \\ b & [0,7 & 0,5] \\ c & [0,5 & 0,7] \end{matrix}$$

Então, exemplificando a união entre as relações R e \bar{R} , tem-se o seguinte:

$$R \cup \bar{R} = \begin{matrix} & d & e \\ a & [0,9 & 0,8] \\ b & [0,7 & 0,5] \\ c & [0,5 & 0,7] \end{matrix}$$

Tomando-se duas relações não *Fuzzy* P(X,Y) e Q(Y,Z) que têm um conjunto (Y) em comum, entende-se que a composição dessas duas relações é definida como um subconjunto R(X,Z) de XxZ, tal que (x,z) ∈ R, se e somente se existe pelo menos um y ∈ Y, tal que (x,y) ∈ P e (y,z) ∈ Q, e é denotada por R(X,Z) = P(X,Y) o Q(Y,Z).

Jafelice *et al.* (2005) destaca que R pode ser obtido, por exemplo, da seguinte forma: composição max-min: $\mu_R(x,z) = \mu_{P \circ Q}(x,z) = \{(x,z), \max[\min(\mu_P(x,y), \mu_Q(y,z))]\}$. Os mesmos autores citam ainda um exemplo de aplicabilidade da Composição das Relações *Fuzzy* expresso adiante.

Exemplo:

Sejam os conjuntos de estudantes X = {Maria, João, Pedro}, de características de cursos Y = {teoria (t), aplicação (a), hardware (h), programação (p)}, e de cursos Z =

Engenharia de Produção
INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL APLICADA À ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

{Lógica *Fuzzy* (LF), Controle *Fuzzy* (CF), Redes Neurais (RN), Sistemas Especialistas (SE)}. Os interesses dos estudantes (em termos das características em Y) são representados pela matriz relacional P, ao passo que as características (Y) dos cursos em Z são dadas pela matriz relacional Q.

$P(X,Y) = \begin{matrix} & t & a & h & p \\ \text{Pedro} & [0,2 & 1 & 0,8 & 0,1] \\ \text{Maria} & [1 & 0,1 & 0 & 0,5] \\ \text{João} & [0,5 & 0,9 & 0,5 & 1] \end{matrix}$	$Q(Y,Z) = \begin{matrix} & LF & CF & RN & SE \\ t & [1 & 0,5 & 0,6 & 0,1] \\ a & [0,2 & 1 & 0,8 & 0,8] \\ h & [0 & 0,3 & 0,7 & 0] \\ p & [0,1 & 0,5 & 0,8 & 1] \end{matrix}$
---	--

A composição max-min de P e Q, como a seguir, pode servir de auxílio aos estudantes na escolha dos cursos.

$$P \circ Q = \begin{matrix} & LF & CF & RN & SE \\ \text{Pedro} & [0,2 & 1 & 0,8 & 0,8] \\ \text{Maria} & [1 & 0,5 & 0,6 & 0,5] \\ \text{João} & [0,5 & 0,9 & 0,8 & 1] \end{matrix}$$

Lopes *et al.* (2005) também exemplificam a Composição de Relações *Fuzzy* com um exemplo de Diagnóstico Médico. A ideia, citada pelos autores, é relacionar os sinais e sintomas dos pacientes com possíveis doenças, de acordo com os conhecimentos médicos. Considerando-se, então, os seguintes os conjuntos universais:

- U= conjunto dos pacientes;
- V = conjunto de sinais e sintomas;
- W= conjunto de doenças.

Neste caso trata-se de doenças das vias aéreas superiores e inferiores das quais têm conhecimento de quatro pacientes (P1 a P4), com onze sinais e sintomas (s1 a s11), que apresentaram quatro diagnósticos (d1 a d4) onde:

✓ Sinais e Sintomas:

- s1 = febre
- s2 = cefaleia
- s3 = garganta
- s4 = exantema
- s5 = gânglio
- s6 = coriza
- s7 = conjuntivite
- s8 = língua de morango
- s9 = fotofobia
- s10 = tosse seca
- s11 = vômito

Engenharia de Produção

INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL APLICADA À ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

✓ Diagnósticos

- d1 = escarlatina
- d2 = rubéola
- d3 = sarampo
- d4 = gripe

As Relações são:

✓ Sinais e Sintomas x Doenças

s \ d	d ₁	d ₂	d ₃	d ₄
s ₁	0.2	0.1	0.1	0.1
s ₂	0.2	0.1	0.3	0.2
s ₃	0.2	0.1	0.1	0.1
s ₄	0.3	0.1	0.1	0.1
s ₅	0.3	1.0	0.1	0.1
s ₆	0.2	0.1	0.1	0.1
s ₇	0.4	0.1	1.0	0.3
s ₈	1.0	0.3	0.4	0.2
s ₉	0.4	0.1	1.0	0.3
s ₁₀	0.2	0.1	0.3	1.0
s ₁₁	0.3	0.1	0.1	0.1

✓ Pacientes x Sinais e Sintomas

P \ s	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	s ₅	s ₆	s ₇	s ₈	s ₉	s ₁₀	s ₁₁
P ₁	0.8	0.4	0.5	0.8	0.2	0.1	0.1	0.9	0.1	0.1	0.4
P ₂	0.3	0.1	0.4	0.8	0.9	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3
P ₃	0.8	0.3	0.5	0.8	0.1	0.2	0.9	0.1	0.6	0.3	0.6
P ₄	0.8	0.7	0.7	0.2	0.1	0.9	0.1	0.1	0.1	0.9	0.4

Para se visualizar melhor os resultados para os vários pacientes, expõe-se a tabela a seguir.

	d1	d2	d3	d4	p1	p2	p3	p4
s1	0,20	0,10	0,10	0,10	0,80	0,30	0,80	0,80
s2	0,20	0,10	0,30	0,20	0,40	0,10	0,30	0,70
s3	0,20	0,10	0,10	0,10	0,50	0,40	0,50	0,70
s4	0,30	0,10	0,10	0,10	0,80	0,80	0,80	0,20
s5	0,30	1,00	0,10	0,10	0,20	0,90	0,10	0,10
s6	0,20	0,10	0,10	0,10	0,10	0,20	0,20	0,90
s7	0,40	0,10	1,00	0,30	0,10	0,10	0,90	0,10
s8	1,00	0,30	0,40	0,20	0,90	0,10	0,10	0,10
s9	0,40	0,10	1,00	0,30	0,10	0,10	0,60	0,10
s10	0,20	0,10	0,30	1,00	0,10	0,10	0,30	0,90
s11	0,30	0,10	0,10	0,10	0,40	0,30	0,60	0,40

✓ Para o paciente 1:

P1			
Min (d1,si; p1,si)	Min (d2,si; p1,si)	Min (d3,si; p1,si)	Min (d4,si; p1,si)
0,20	0,10	0,10	0,10
0,20	0,10	0,30	0,20
0,20	0,10	0,10	0,10
0,30	0,10	0,10	0,10
0,20	0,20	0,10	0,10
0,10	0,10	0,10	0,10
0,10	0,10	0,10	0,10
0,90	0,30	0,40	0,20
0,10	0,10	0,10	0,10
0,10	0,10	0,10	0,10
0,30	0,10	0,10	0,10
0,90	0,30	0,40	0,20

✓ Para o paciente 2:

P2			
Min (d1,si; p2,si)	Min (d2,si; p2,si)	Min (d3,si; p2,si)	Min (d4,si; p2,si)
0,20	0,10	0,10	0,10
0,10	0,10	0,10	0,10
0,20	0,10	0,10	0,10
0,30	0,10	0,10	0,10
0,30	0,90	0,10	0,10
0,20	0,10	0,10	0,10
0,10	0,10	0,10	0,10
0,10	0,10	0,10	0,10
0,10	0,10	0,10	0,10
0,10	0,10	0,10	0,10
0,10	0,10	0,10	0,10
0,30	0,10	0,10	0,10
0,30	0,90	0,10	0,10

✓ Para o paciente 3:

P3			
Min (d1,si; p3,si)	Min (d2,si; p3,si)	Min (d3,si; p3,si)	Min (d4,si; p3,si)
0,20	0,10	0,10	0,10
0,20	0,10	0,30	0,20
0,20	0,10	0,10	0,10
0,30	0,10	0,10	0,10
0,10	0,10	0,10	0,10
0,20	0,10	0,10	0,10
0,40	0,10	0,90	0,30
0,10	0,10	0,10	0,10
0,40	0,10	0,60	0,30
0,20	0,10	0,30	0,30
0,30	0,10	0,10	0,10
0,40	0,10	0,90	0,30

✓ Para o paciente 4:

P4			
Min (d1,si; p4,si)	Min (d2,si; p4,si)	Min (d3,si; p4,si)	Min (d4,si; p4,si)
0,20	0,10	0,10	0,10
0,20	0,10	0,30	0,20
0,20	0,10	0,10	0,10
0,20	0,10	0,10	0,10
0,10	0,10	0,10	0,10
0,20	0,10	0,10	0,10
0,10	0,10	0,10	0,10
0,10	0,10	0,10	0,10
0,10	0,10	0,10	0,10
0,20	0,10	0,30	0,90
0,30	0,10	0,10	0,10
0,30	0,10	0,30	0,90

Os resultados denotam a distribuição de possibilidades dos pacientes no conjunto de doenças dado que ele apresenta em certa distribuição de possibilidades no conjunto de sintomas.

O Produto Cartesiano *Fuzzy* pode ser definido como a relação entre dois ou mais conjuntos *Fuzzy*. Considerando-se os conjuntos *Fuzzy* A, no universo X, e B no universo Y. O Produto Cartesiano será uma Relação *Fuzzy* R na forma:

$$A \times B = R \subset X \times Y, \text{ onde } \mu_R(X, Y) = \mu_{A \times B}(X, Y) = \min(\mu_A(X), \mu_B(Y))$$

Por exemplo, para A = {0,2/a; 0,5/b; 0,1/c} e B = {0,3/d; 0,9/e}

$$A = \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,5 \\ 0,1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{matrix} d & e \\ 0,3 & 0,9 \end{matrix}$$

$$A \times B = R = \begin{matrix} & d & e \\ a & 0,20,2 \\ b & 0,30,5 \\ c & 0,30,9 \end{matrix}$$

3. LÓGICA FUZZY

A Lógica *Fuzzy*, fundamental para o tratamento de problemas reais que envolvam principalmente as imprecisões, as não linearidades, os valores qualitativos e quantitativos e o pensamento humano, é baseada na Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*. A

Lógica *Fuzzy* pode ser vista como uma linguagem apropriada para descrever e analisar dependências imprecisas, Zadeh (1971) *apud* Melo (2002), ou como uma matemática que pode representar as incertezas do cotidiano, Marks II (1994) *apud* Melo (2002).

Pode-se afirmar que a Lógica *Fuzzy* tem sido fundamental para a consecução de projetos de sistemas especialistas e um importante suporte para tomadas de decisão em vários segmentos do conhecimento humano. É importante ressaltar que a Lógica *Fuzzy* está fortemente correlacionada com os sistemas especialistas para a tomada de decisão. THOMPSON (2005)

A transição entre o conhecimento que se obtém no mundo real para um modelo com a Lógica *Fuzzy*, com suas entradas e saídas, pode ser resumida conforme exposto no diagrama da figura 1. As entradas do modelo geralmente são números não *Fuzzy* que, quando agregados às funções de pertinência na etapa de *Fuzzyficação*, redundam em conjuntos *Fuzzy* (vetor *Fuzzy*). Por exemplo, segundo Ross (2010), para um Vetor *Fuzzy* \tilde{A} tem-se a seguinte representação: $\tilde{A} = \left\{ \frac{\mu_1}{\text{baixo}} + \frac{\mu_2}{\text{médio}} + \frac{\mu_3}{\text{alto}} \right\}$.

De posse destes conjuntos, unindo-se às regras obtidas por intermédio da análise do comportamento do modelo no mundo real, obtém-se o conhecimento sobre todo o seu comportamento, considerando a análise em questão. A etapa final denominada *Defuzzyficação* consiste em traduzir o resultado da avaliação das regras que determinam o comportamento do modelo para obtenção de saídas *Fuzzy*, em saídas não *Fuzzy*.

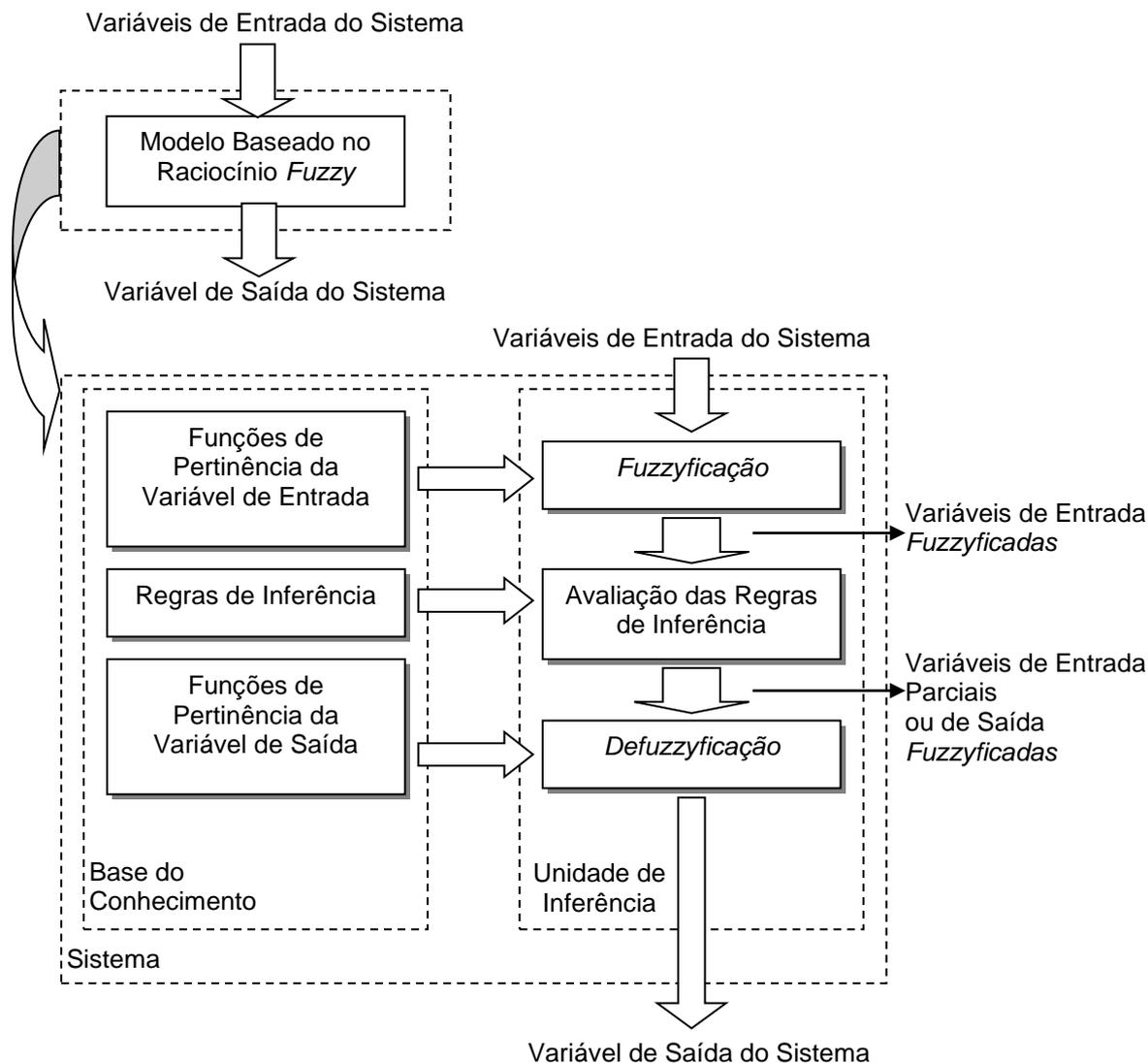


Figura 1 – Modelo Resumido do Raciocínio Fuzzy

Fonte: Adaptado de Vanderlei Filho *et al.* (2002)

De acordo com Oliveira Jr. (1999) a abordagem *Fuzzy* é ideal para capturar toda a experiência do especialista, transformando subjetividade em graus de pertinência, raciocínio em base de regras, tomada de decisão em inferência e *Defuzzyficação*.

Oliveira Jr. (1999) cita que o raciocínio *Fuzzy* é uma metodologia de inferência que utiliza ferramentas e conceitos da Lógica *Fuzzy* para atingir os objetivos e conclusões.

Para isto, necessitam-se formar regras ou proposições *Fuzzy* do tipo:



De acordo com Shaw *et al.* (1999) os sistemas *Fuzzy* baseados em regras (SFBR) baseiam-se no teorema da aproximação *Fuzzy*:

$$\text{SFBR} = (\mu, R, T, S, \text{DEF}), \text{ sendo}$$

“ μ ” as funções de pertinência, “R” a base de regras, “T” as operações dentro da regra, “S” as operações entre regras e “DEF” o método de *Defuzzyficação*.

Shaw *et al.* (1999) citam algumas vantagens práticas para a utilização do raciocínio *Fuzzy*:

- ✓ Regras ou proposições *Fuzzy* são de fácil compreensão e interpretação pelas pessoas técnicas e não técnicas;
- ✓ As regras individuais combinam-se para formar uma estrutura complexa, permitindo o processamento paralelo que facilita a estrutura computacional do modelo do sistema;
- ✓ Pode-se trabalhar com sistemas lineares e não lineares.

O “antecedente” de uma regra é a associação de uma ou mais variáveis de entrada com conjuntos *Fuzzy* e o “consequente” da mesma é a ligação entre as variáveis de saída, com também, conjuntos *Fuzzy*. As variáveis de entrada são conectadas entre si por intermédio de operadores lógicos *Fuzzy*, associando-os a conjuntos *Fuzzy*, em todo universo de discurso, por intermédio de funções de pertinência. ARAÚJO (2004).

Baseando-se em Oliveira Jr. (1999), Shaw *et al.* (1999) e Araújo (2004), uma base de i regras com n variáveis de entrada e uma variável de saída (*Multiple Input and Single Output* - MISO) apresenta a seguinte forma:

Agregação	Composição
R1: Se (X1 é A11) <conectivo> (X2 é A21) .. <conectivo> (Xn é An1)	então (Y é B1)
R2: Se (X1 é A12) <conectivo> (X2 é A22) .. <conectivo> (Xn é An2)	então (Y é B2)
⋮	
⋮	
⋮	
Ri: Se (X1 é A1i) <conectivo> (X2 é A2i) .. <conectivo> (Xn é Ani)	então (Y é Bi)
Antecedente	Consequente

Onde R_i é a i -ésima regra, X_n é a n -ésima variável de entrada, Y é a variável de saída e A_{ni} e B_i são os valores *Fuzzy* das variáveis de entrada e de saída, respectivamente, cada qual representado por conjuntos *Fuzzy* definidos no universo de discurso das variáveis. Vale ressaltar que as variáveis de entrada podem ser ou não valores linguísticos.

Goudart (2001) e Silva (2005) ressaltam que cada regra pode ter um fator de ponderação (FP), compreendido entre 0 e 1, para representar a importância de cada regra em relação às demais.

Os conectivos representam os operadores *Fuzzy* escolhidos para expressar a inferência *Fuzzy*. Eles combinam os vários valores *Fuzzy*. Esta combinação é denominada agregação.

Shaw *et al.* (1999) ressaltam que muitos sistemas baseados em regras resultam de entrevistas com operadores, especialistas, clientes etc., proporcionando a liberdade para o projetista alterar para adaptar a estrutura de inferência de acordo com a compreensão do entrevistado.

O processo de inferência *Fuzzy* mais comum foi desenvolvido E. Mamdani, da Universidade de Londres, exposto pela primeira vez em Mamdani (1975). É comumente conhecido como MAX-MIN, considerando-se que se utiliza o conectivo “E” (operador MIN – T-Norma – símbolo \wedge) na parte antecedente da regra e o conectivo “OU” (operador MAX – T-Conorma – símbolo \vee) na composição entre as regras que são processadas em paralelo. O processo de Mamdani pode ser resumido, segundo Souza (1999), da seguinte forma: Se x é A E y é B ENTÃO z é C . Segundo o mesmo autor, existem ainda três outros tipos de processos de inferência:

- ✓ Takagi-Sugeno: Se x é A E y é B ENTÃO $z = f(x,y)$;
- ✓ Tsukamoto: tem a mesma estrutura do tipo Mamdani, mas considerando que o conseqüente de cada regra é representado por um conjunto *Fuzzy* com uma função de pertinência monotônica (figura 8);

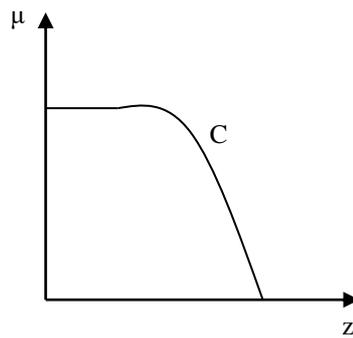


Figura 8 - Exemplo da Estrutura de Tsukamoto

- ✓ Classificação: Se x é A E y é B ENTÃO padrão (x,y) para comparação. As saídas são calculadas diretamente pelas operações de t-conorma aplicadas sobre o grau de disparo das regras (t-norma). Neste caso não há procedimento de *Defuzzyficação*.

Tanscheit (2002) ressalta que o conectivo “E”, em geral, é utilizado para variáveis em diferentes universos, pois, caso contrário, a interpretação semântica invalidaria a premissa (p.e., consumo é *alto* e *baixo*). Nestes casos pode-se utilizar a complementação “NÃO”, como por exemplo, consumo é *não alto* e *não baixo*. Para o conectivo “OU”, se as variáveis forem de diferentes universos, a declaração parece ser semanticamente incorreta, como por exemplo, consumo é *alto* ou *velho*.

Cox (1994) *apud* Vargens *et al.* (2003) destaca que o método de inferência MAX-MIN não contempla os graus de pertinência de todas as regras ativadas, tomando-se somente o valor máximo dentre eles. Eles propõem o método da composição da soma limitada que contempla todos os valores de pertinência resultantes para um conjunto *Fuzzy* de saída. Para o cálculo, devem-se somar todos os valores de pertinência, de todas as regras ativadas, limitando-se este resultado a 1.

O resultado da inferência é um vetor linguístico com os respectivos graus de pertinência determinados na agregação das regras. Segundo Ortega (2001), este vetor fornece a distribuição de possibilidades de certa condição em um conjunto *Fuzzy*.

Esse vetor pode então ser *defuzzyficado* de acordo com os seguintes métodos:

- ✓ Do Valor Máximo: esse método produz como ação de inferência o valor numérico da saída, exposto na abscissa da função de pertinência, que corresponde ao maior grau de pertinência da variável linguística.
- ✓ Da Média dos Máximos: esse método produz um valor numérico de saída corresponde à média aritmética dos máximos, expostos na abscissa da função de pertinência, da variável linguística de saída produzida pela inferência *Fuzzy*.
- ✓ Do Centro dos Máximos: esse método produz um valor de saída correspondente à média ponderada entre os valores máximos, expostos na abscissa da função de pertinência, da variável linguística de saída produzida pela inferência *Fuzzy* com os pesos, representados pelos respectivos valores de pertinência.
- ✓ Do Centro de Gravidade, Centro de Área ou Centróide: o valor numérico de saída corresponde ao valor da abscissa que divide pela metade a área da função de pertinência gerada pela combinação das partes “consequente” das regras. Segundo Oliveira Jr. (1999) pode-se expressar este método pelas seguintes expressões:

- Para o conjunto discreto:

$$\text{Saída} = \frac{\sum x(i) \cdot \mu(i)}{\sum \mu(i)}, \text{ considerando-se } \mu = \{\mu(i) / x(i)\};$$

- Para o conjunto contínuo:

$$\text{Saída} = \frac{\int \mu(x) \cdot x dx}{\int \mu(x) dx}, \text{ considerando-se } \mu \text{ imerso em um universo contínuo}$$

X, com função de pertinência $\mu(x)$, supondo que $\mu(x)$ é uma função real integrável.

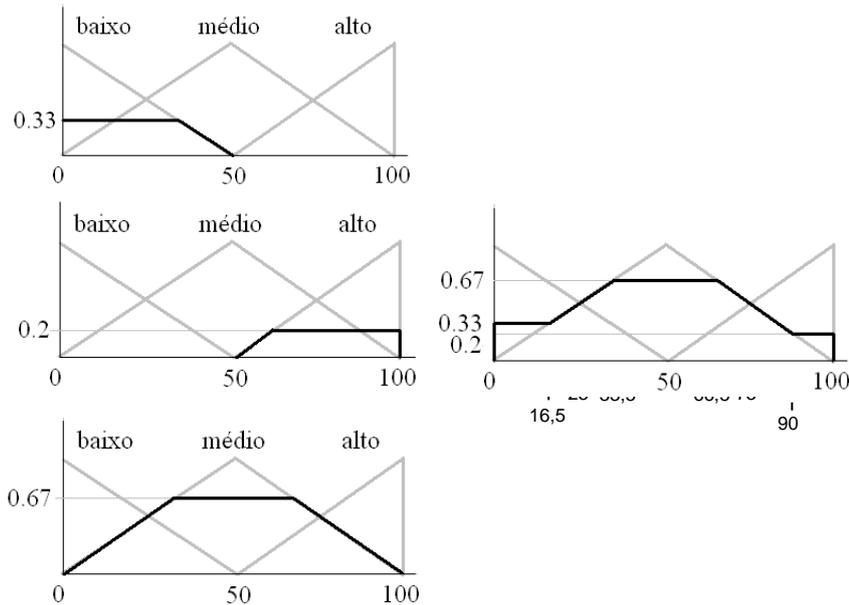
Observação: Alguns autores tratam a *Defuzzyficação* pelo centróide utilizando-se o cálculo das áreas:

- Para um trapézio dado por $A_{tra} = \frac{(b+B)h}{2}$ sendo:
 - *Atra* a área do trapézio;
 - *b* é a base menor;
 - *B* é a base maior;
 - *h* é a altura.
- Para um triângulo dado por $A_{tri} = \frac{b \times h}{2}$ sendo:
 - *Atri* a área do trapézio;

- b é a base;
- h é a altura.

Sendo assim, o cálculo do centroide é efetuado por: Saída = $\frac{\sum x_{\text{centróide}} \times \text{Área}}{\sum \text{Áreas}}$

Exemplo:



Resultados:

a) Valor Máximo: 50 (baixo-0,33; **médio-0,67**; alto-0,2)

b) Média dos Máximos: $\frac{33,5+50+66,5}{3} = 50$

c) Do Centro dos Máximos: $\frac{(0,33 \times 0) + (100 \times 0,2) + (50 \times 0,67)}{0,33 + 0,2 + 0,67} = 44,58$

d) Centroide – Conjunto Contínuo:

$$\frac{\int_{0 \rightarrow 0,33}^{16,5 \rightarrow 0,33} 0,33x/x + \int_{16,5 \rightarrow 0,33}^{33,5 \rightarrow 0,67} (3,92x - 64,38)x/x + \int_{33,5 \rightarrow 0,67}^{66,5 \rightarrow 0,67} 0,67x/x + \int_{66,5 \rightarrow 0,67}^{90 \rightarrow 0,20} (-0,02x + 2)x/x + \int_{90 \rightarrow 0,20}^{100 \rightarrow 0,20} 0,20x/x}{\int_{0 \rightarrow 0,33}^{16,5 \rightarrow 0,33} 0,33/x + \int_{16,5 \rightarrow 0,33}^{33,5 \rightarrow 0,67} (3,92x - 64,38)/x + \int_{33,5 \rightarrow 0,67}^{66,5 \rightarrow 0,67} 0,67/x + \int_{66,5 \rightarrow 0,67}^{90 \rightarrow 0,20} (-0,02x + 2)/x + \int_{90 \rightarrow 0,20}^{100 \rightarrow 0,20} 0,20/x}$$

e) Centroide – Conjunto Discreto:

$$\frac{(0,33 \times 0) + (0,33 \times 16,5) + (0,67 \times 33,5) + (0,67 \times 66,5) + (0,20 \times 90) + (0,20 \times 100)}{0,33 + 0,33 + 0,67 + 0,67 + 0,20 + 0,20} =$$

$$= \frac{0 + 5,445 + 22,445 + 44,555 + 18 + 20}{2,4} = \frac{110,445}{2,4} = 46,02$$

f) Centroide – Área:

Conjunto baixo: $X_{\text{Centroide}} = 25$; área = $[(50+33,5) \cdot 0,33]/2 = 13,78$

Conjunto médio: $X_{\text{Centroide}} = 50$; área = $[(33+100) \cdot 0,67]/2 = 44,56$

Conjunto alto: $X_{\text{Centroide}} = 75$; área = $[(40+50) \cdot 0,20]/2 = 9,00$

$$\frac{(25 \times 13,78) + (50 \times 44,56) + (75 \times 9)}{13,78 + 44,56 + 9,00} = \frac{162375}{3367} = 48,23$$

4. FUZZY MULTICRITÉRIO

A Teoria *Fuzzy* é também utilizada como base para análise multicritério. Esta análise de decisão consiste em um conjunto de métodos e técnicas para auxiliar a tomada de decisões, quando da presença de uma multiplicidade de critérios, muitas vezes conflitantes entre si.

Por exemplo, a compra de um carro dificilmente será, somente, baseada no preço, havendo necessidade de analisar outros critérios, tais como o conforto, qualidade, desempenho.

Além disso, nota-se que a reação dos decisores quanto aos “pesos” dos critérios não é a mesma, denotando que não há uma alternativa dita “ideal”. A melhor alternativa deve ter os níveis mais elevados de adesão em relação a todos os critérios.

Pode-se então resumir a análise multicritério nas seguintes características:

- ✓ Múltiplos critérios – cada problema apresenta uma multiplicidade de critérios para decisão, que podem ser considerados objetivos ou subjetivos;
- ✓ Conflitos entre critérios – muitos dos critérios são conflitantes entre si;
- ✓ Diferentes unidades de medida – os critérios podem ter universos de discursos diferentes;
- ✓ Concepção x Seleção – as soluções para problemas multicritério podem passar pela concepção da melhor alternativa ou pela seleção da melhor de entre um conjunto de alternativas.

Os métodos e técnicas multicritério partem do princípio de que os critérios, e respectivos pesos, devem ser expressos de forma clara, para que o ranqueamento das alternativas seja feito de forma eficiente.

Porém, em uma situação real, a aplicação prática pode enfrentar limitações inerentes ao processo por conter imprecisões quanto aos dados coletados, como por exemplo, quando há a necessidade de expressar certos critérios de forma qualitativa.

Para exemplificar a utilização da Teoria *Fuzzy* nesses problemas será utilizado um exemplo com o uso da técnica SAW (*Simple Additive Weighting*), uma das mais

Engenharia de Produção

INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL APLICADA À ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

conhecidas e amplamente utilizada devido a sua simplicidade, utilizando-se números triangulares. Essa união entre a Teoria *Fuzzy* e SAW é denominada FSAW.

Na SAW a melhor alternativa pode ser obtida por meio da seguinte expressão que representa a função utilidade:

$$S_i = \sum_{j=1}^n w_j \cdot r_{ij}, \text{ onde:}$$

- ✓ S_i é a função de utilidade da i -ésima alternativa, para $i=1,2,\dots,n$;
- ✓ w_j é o peso do j -ésimo critério, sendo $j=1,2,\dots,n$;
- ✓ r_{ij} é o dado normalizado da i -ésima alternativa do j -ésimo critério.

Os passos para aplicação do SAW são:

1 – Montar um modelo explicitando o objetivo geral, os critérios e as alternativas, conforme exemplo da figura 9.

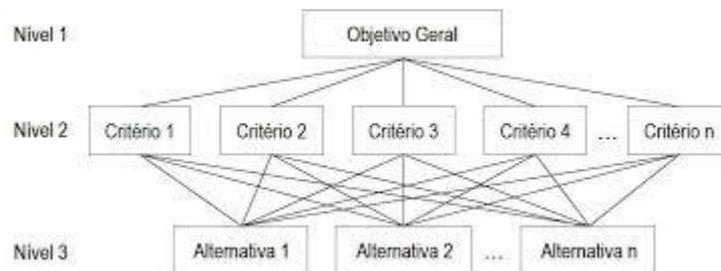


Figura 9: Exemplo de Modelo

2 – Elaborar a matriz de decisão, em uma tabela, onde serão listadas as Alternativas nas colunas e os Critérios nas linhas. A Figura 10 expõe um exemplo.

Critérios	C1	C2	C3	Cj
Alternativas				
A1	r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{1j}
A2	r_{21}	r_{22}	r_{23}	r_{2j}
Ai	r_{i1}	r_{i2}	r_{i3}	r_{ij}

3 – Determinar os dados de cada alternativa/critério e normalizá-los. Existem várias formas para se normalizar, sendo que nesse exemplo será utilizada a forma linear, que consiste em efetuar o cálculo segundo a seguinte expressão:

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\max(x_{ij})},$$

Engenharia de Produção
INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL APLICADA À ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

sendo x_{ij} dado não normalizado da i -ésima alternativa do j -ésimo critério.

4 – Determinar o peso e a ordem de cada Critério. Se o critério for simplesmente ordenado segundo a sua importância, em uma escada natural, por exemplo, será utilizada a forma Recíproca, calculada pela seguinte expressão:

$$w_j = \frac{\frac{1}{r_j}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k}}$$

Entende-se como ordenação natural para, por exemplo, 4 critérios, a seguinte opção:

Critérios	Desenho	Potência	Economia	Preço
Ordenação	4	2	3	1

Sendo 1 o mais importante e 4, menos importante.

O denominador será o seguinte:

$$denominador = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 2,08$$

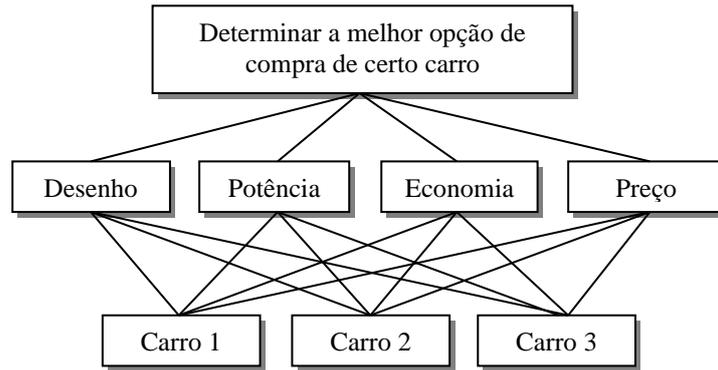
Critérios	Desenho	Potência	Economia	Preço
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{1}$
	$\frac{1/4}{denominador}$	$\frac{1/2}{denominador}$	$\frac{1/3}{denominador}$	$\frac{1}{denominador}$

Critérios	Desenho	Potência	Economia	Preço
	0,12	0,24	0,16	0,48

5 – Determinar a alternativa mais adequada para os referidos critérios tomando-se o valor central do triângulo *Fuzzy*.

Segue um exemplo que destaca a necessidade de se comprar um carro baseando-se em quatro critérios.

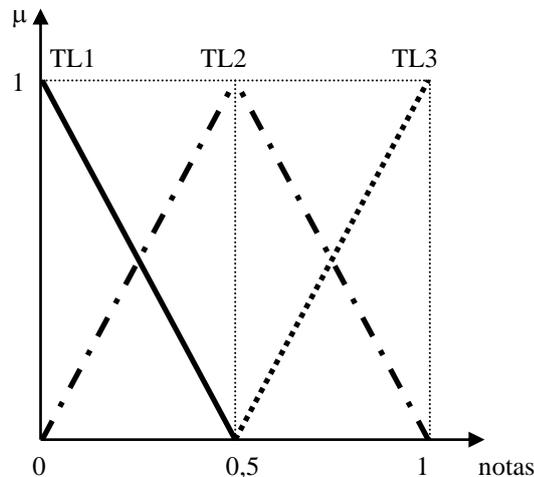
1 – Modelo



2 – Matriz de Decisão

Critérios	Desenho	Potência	Economia	Preço
Alternativas				
Carro 1	r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{1j}
Carro 2	r_{21}	r_{22}	r_{23}	r_{2j}
Carro 3	r_{i1}	r_{i2}	r_{i3}	r_{ij}

3 – Dados e normalização. Os dados qualitativos seguirão a característica da variável *Fuzzy* exposta a seguir, onde TL são os termos linguísticos e x notas representativas no universo de discurso.



A tabela adiante resume os dados de cada alternativa/critério.

Critérios	Desenho	Potência	Economia	Preço (R\$ x 10 ³) ³
Alternativas				
Carro 1	feio	alta	média	30
Carro 2	lindo	média	baixa	28
Carro 3	razoável	baixa	alta	25

Convertendo os dados qualitativos em triângulos *Fuzzy* chega-se à tabela a seguir.

³ Variação de ±10% devido a negociação de compra.

Engenharia de Produção
INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL APLICADA À ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Critérios	Desenho	Potência	Economia	Preço (R\$ x 10 ³)
Alternativas				
Carro 1	(0;0;0,5)	(0,5;1;1)	(0;0,5;1)	30
Carro 2	(0,5;1;1)	(0;0,5;1)	(0;0;0,5)	28
Carro 3	(0;0,5;1)	(0;0;0,5)	(0,5;1;1)	25

A tabela adiante expõe os dados normalizados do critério preço. A melhor situação é o preço = R\$ 25.000,00. Então essa será a referência para normalização.

Critérios	Desenho	Potência	Economia	Preço (R\$ x 10 ³)
Alternativas				
Carro 1	(0;0;0,5)	(0,5;1;1)	(0;0,5;1)	(0,75;0,83;0,92)
Carro 2	(0,5;1;1)	(0;0,5;1)	(0;0;0,5)	(0,80;0,89;0,98)
Carro 3	(0;0,5;1)	(0;0;0,5)	(0,5;1;1)	(0,90;1;1)

4 – Pesos de cada Critério (a importância do critério para certo cliente).

Critérios	Desenho	Potência	Economia	Preço
	pouca	média	média	muita

Convertendo os pesos qualitativos em triângulos *Fuzzy* chega-se à próxima tabela.

Critérios	Desenho	Potência	Economia	Preço
	(0;0;0,5)	(0;0,5;1)	(0;0,5;1)	(0,5;1;1)

Cabe observar que a forma Recíproca não será necessária, pois as respostas foram qualitativas. Se fossem dadas notas de 0 a 10, por exemplo, necessitaria efetuar tal cálculo, como no exemplo apresentado no item 4 anterior.

5 – Determinar a alternativa mais adequada.

$$\text{Carro 1} = (0;0;0,5) \times (0;0;0,5) + (0;0,5;1) \times (0,5;1;1) + (0;0,5;1) \times (0;0,5;1) + (0,5;1;1) \times (0,75;0,83;0,92) = (0,38;1,58;3,17)$$

$$\text{Carro 2} = (0,40;1,14;2,98)$$

$$\text{Carro 3} = (0,45;1,50;3,00)$$

Observação: os resultados estão com aproximação de casas decimais.

Determinando-se um valor *crisp*, utilizando-se a distribuição triangular, cada carro terá como resultado:

Carro1 = 1,68

Carro2 = 1,42

Carro3 = 1,61

Então a melhor opção de compra é o Carro 1.

5. OUTRAS TÉCNICAS FUZZY PARA APOIO À DECISÃO

5.1. DECISÃO BASEADA NO RETORNO DAS EXTENSÕES (DFE)⁴

Considerar que se necessita selecionar o melhor estudante tomando-se as notas em quatro disciplinas. A tabela dos alunos com suas notas em matemática, Física, Química e língua estrangeira, está exposta adiante.

	Matemática	Física	Química	L.Estrangeira
Aluno 1	86	91	95	93
Aluno 2	98	89	93	90
Aluno 3	90	92	85	96

A função de pertinência para o conjunto “Excelente Estudante” é:

$$\mu_a(x) = \begin{cases} 1 & ,se \quad 90 \leq x \leq 100 \\ \frac{x - 80}{10} & ,se \quad 80 \leq x < 90 \\ 0 & ,se \quad 0 \leq x < 80 \end{cases}$$

Identificando-se os graus de pertinência de cada nota em relação ao conjunto “Excelente Estudante”, tem-se:

	Matemática	Física	Química	L.Estrangeira
Aluno 1	0,6	1	1	1
Aluno 2	1	0,9	1	1
Aluno 3	1	1	0,5	1

O produto entre os graus de pertinência das quatro disciplinas, para cada aluno, chega-se a:

Aluno 1: 0,6

Aluno 2: 0,9

Aluno 3: 0,5

Outra possibilidade de análise é quando se utiliza o Modelo Multifatorial de Decisão aplicando-se a seguinte expressão:

$$\text{Grau do Aluno} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i}{n}$$

⁴ Adaptado de Li and Yen (1995)

Onde n é a quantidade de disciplinas (fatores) de cada aluno.

$$\text{Grau Aluno 1} = \frac{3,6}{4} = 0,9; \text{ Grau Aluno 2} = \frac{3,9}{4} = \mathbf{0,975}; \text{ Grau Aluno 3} = \frac{3,5}{4} = 0,875$$

5.2. COMPARAÇÃO DE PREFERÊNCIA⁵

Suponha que haja a necessidade de uma fábrica identificar a preferência dos seus consumidores sobre a cor de certo produto. Serão comparadas cinco cores, por cada par: vermelho, laranja, amarelo, verde, azul. Nesse exemplo foram entrevistados 1000 consumidores, tendo como resposta da análise por par os resultados expressos na seguinte tabela:

Preferencial	Vermelho	Laranja	Amarelo	Verde	Azul
Vermelho	-	517	525	545	661
Laranja	483	-	841	477	576
Amarelo	475	159	-	534	614
Verde	455	523	466	-	643
Azul	339	524	386	357	-

Para se determinar a cor preferida será necessário calcular o grau de pertinência de cada cor usando a seguinte expressão:

$$\mu(\text{cor}) = \frac{\sum \text{cor}}{\frac{1}{2} nq(q-1)}$$

Onde n é a quantidade de entrevistados e q a quantidade de opções.

Dessa forma, a próxima tabela expõe os dados parciais para que seja possível calcular $\mu(\text{cor})$.

Preferencial	Vermelho	Laranja	Amarelo	Verde	Azul	$\sum \text{cor}$
Vermelho	-	517	525	545	661	2248
Laranja	483	-	841	477	576	2237
Amarelo	475	159	-	534	614	1782
Verde	455	523	466	-	643	2087
Azul	339	524	386	357	-	1506

$$\mu(\text{vermelho}) = \frac{2248}{0,5 \times 1000 \times 5 \times 4} = 0,2248$$

$$\mu(\text{laranja}) = \mathbf{0,2377}$$

$$\mu(\text{amarelo}) = 0,1782$$

⁵ Adaptado de Li and Yen (1995)

$$\mu(verde) = 0,2087$$

$$\mu(azul) = 0,1506$$

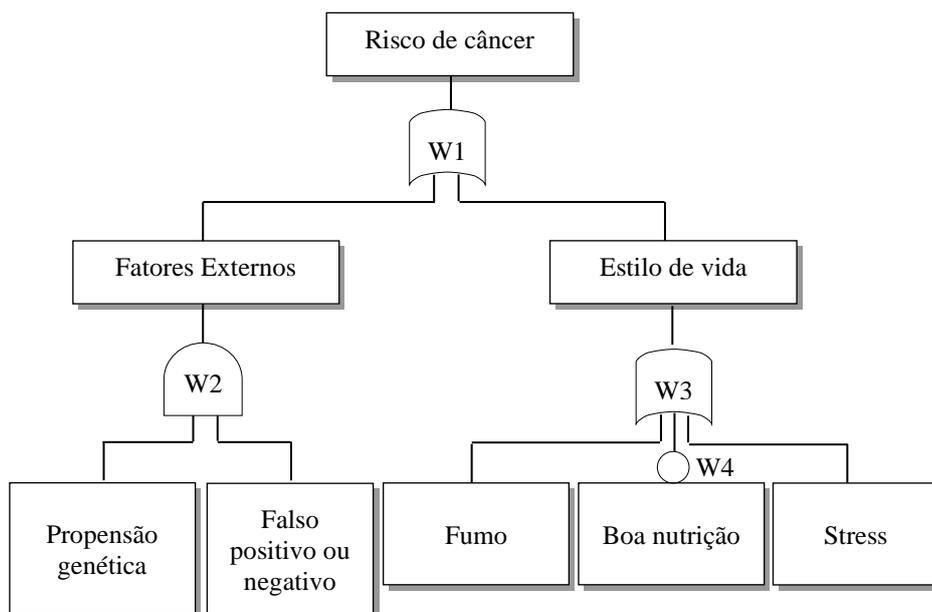
5.3. MÉTODO PARA COMPARAÇÃO PAREADA MÉDIA⁶

Suponha que certo pai tem três filhos que serão comparados quanto a aparência com ele. Se efetuar a comparação par a par, chega-se ao seguinte resultado:

- Filho 1 x Filho 2 = A aparência do Filho 1, quando comparada com o Filho 2, está bem próxima, ou seja, 0,8;
- Filho 1 x Filho 3 = A aparência do Filho 1, quando comparada com o Filho 3, medianamente próxima, ou seja, 0,5;
- Filho 2 x Filho 1 = A aparência do Filho 2, quando comparada com o Filho 1, está bem próxima, ou seja, 0,8.

5.4. ÁRVORE DE DECISÃO FUZZY⁷

Podem-se utilizar operadores básicos de conjuntos *Fuzzy* em situações em que existam alternativas para serem analisadas, tal como em um diagrama (árvore) de decisão. As portas lógicas utilizadas são identificadas como w_1 (ou), w_2 (e) e w_3 (ou). O w_4 representa o complemento ou “negação” do registro “boa nutrição”.



⁶ Adaptado de Li and Yen (1995)

⁷ Adaptado de Xu *et al.* (2008) – item 2.4.2 pg.27

O tratamento de cada porta lógica é dado utilizando-se os princípios expostos nas páginas 16 e 29, para os conectivos “ou” (T-conorma - \vee - max) e “e” (T-norma - \wedge - min). O complemento é processado como apresentado na página 15.

Em Xu *et al.* (2008) existe uma alternativa de inferência à representação de conjuntos dada por Zadeh, que é:

- ✓ Yager União: $(A \cup_w B)(x) = \min \{1, (A(x)^w + B(x)^w)^{1/w}\}$, $w \in (0, \infty)$;
- ✓ Yager Interseção: $(A \cap_w B)(x) = 1 - \min \{1, ((1 - A(x))^w + (1 - B(x))^w)^{1/w}\}$, $w \in (0, \infty)$;
- ✓ Yager Complemento: $A^c(x) = (1 - A(x)^w)^{1/w}$, $w \in (0, \infty)$.

Cabe observar que qualquer opção de escolha de w o valor resultante da Yager União é maior (mais otimista) que a de Zadeh; para Yager Interseção, o valor resultante é menor (mais pessimista) que o padrão de Zadeh. Assim, quem controla o grau Otimismo ou Pessimismo é o parâmetro w .

Para a árvore de decisão, considerar para certa pessoa os graus de pertinência para as causas no último nível: falso positivo ou negativo: 0,8; propensão genética: 0,2; fumo: 0; stress: 0,1; boa nutrição: 0,8.

Os Parâmetros w foram: $w_1 = 0,5$; $w_2 = 0,5$; $w_3 = 1,0$; $w_4 = 2,0$

Os resultados obtidos foram:

- ✓ Porta OU (Risco de Câncer) = 0,7;
- ✓ Porta E (Fatores externos) = 0;
- ✓ Porta OU (Estilo de vida) = 0,7;
- ✓ Negação = 0,6.

Testes	w_1	w_2	w_3	w_4	Risco
1	0,5	0,5	1,0	2,0	0,7
2	0,5	0,5	2,0	0,5	0,1
3	1,0	10,0	1,0	0,5	0,3
4	0,5	0,5	0,5	2,0	1,0

Outro teste que poderia ser desenvolvido, mantendo-se os parâmetros w constantes em $w_1 = 1,0$; $w_2 = 10,0$; $w_3 = 1,0$; $w_4 = 0,5$, é se avaliar a condição de fumante ou exposição à fumaça de cigarro que interfere no fator Estilo de Vida. Os resultados obtidos para vários graus de pertinência foram:

Fumo	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Risco	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,0	1,0

REDES NEURAIIS ARTIFICIAIS

As Redes Neurais Artificiais (RNA) são sistemas paralelos distribuídos, inspirados no funcionamento do cérebro humano, que podem aprender a prever e se adaptar ao mundo real. São compostas por unidades de processamento simples, denominadas “neurônios”, que processam determinadas relações. Estas unidades são dispostas em uma ou mais camadas e interligadas por conexões (figura 9), que na maioria das vezes estão associadas a pesos numéricos que armazenam o conhecimento da rede. Tal conhecimento é obtido por um processo de aprendizagem que altera estes pesos objetivando a modelagem correta.

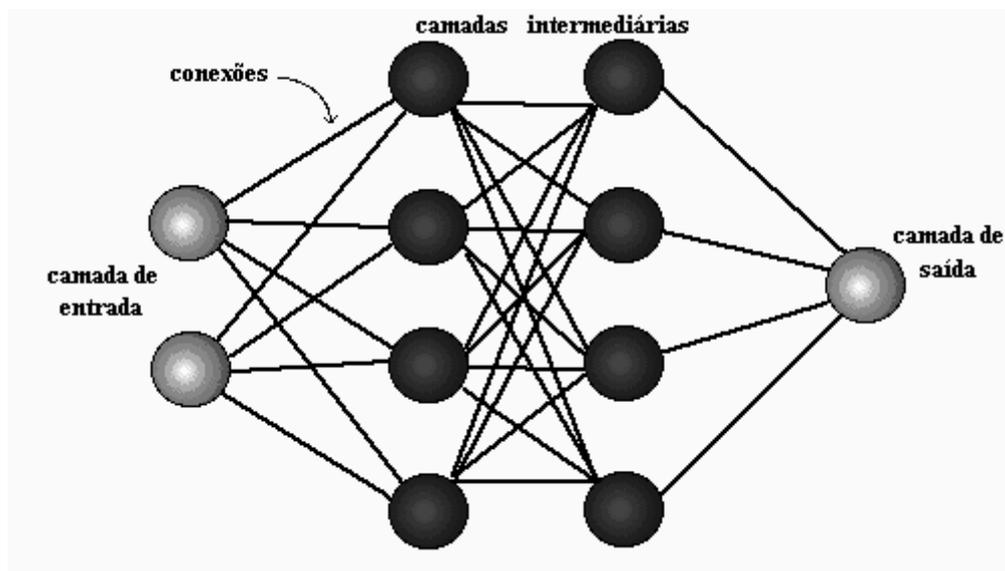


Figura 9 - Exemplo de Rede Neural Genérica

Fonte: Tatibana *et al.* (s/d)

Um modelo genérico de um neurônio artificial, com os pesos associados às variáveis de entrada é apresentado na figura 10.

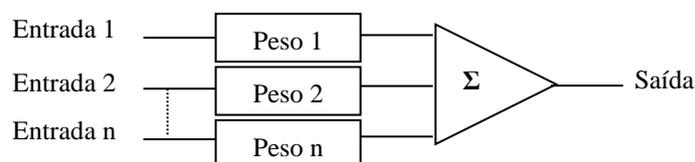


Figura 10: Modelo Simplificado de Neurônio Artificial com Pesos para Treinamento

Fonte: Adaptado de Aurélio *et al.* (1999)

O modelo de neurônio MCP, proposto por McCulloch e Pitts, em 1943, é uma simplificação do neurônio biológico descrito naquela época. Ele é composto de n entradas e uma saída. (Medeiros *et al.*, 2003) A simplificação gráfica deste modelo está exposta na figura 11.

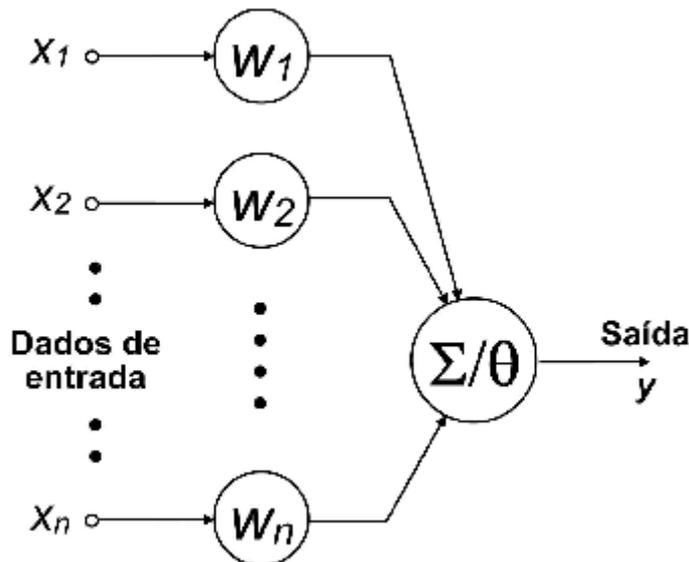
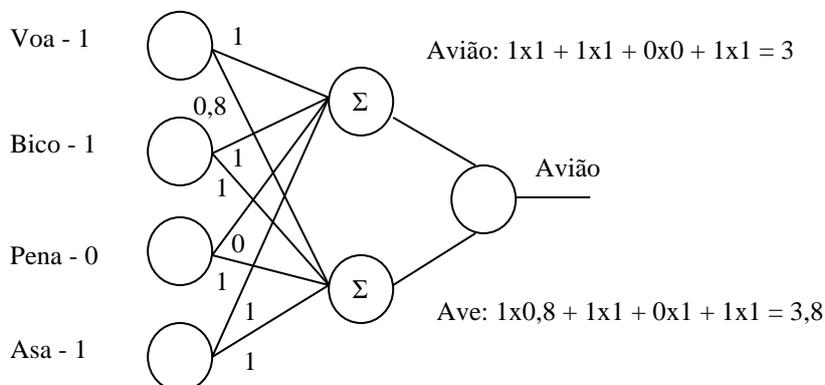


Figura 11 - Modelo de neurônio MCP

No modelo de neurônio MCP a sua ativação é dada pela inserção de uma função de ativação ($\sum_{i=1}^n x_i w_i \geq \theta$), que pode ativar ou não a saída (y), pois depende dos pesos (W_n) das entradas (X_n), onde n é a quantidade de entradas. Se este nível de atividade exceder certo limite ou limiar (θ - *threshold*) a unidade produz uma determinada resposta de saída.

O exemplo exposto a seguir apresenta uma rede neural que deve identificar se, de acordo com as entradas, a saída é um avião ou não.



Cabe observar que o valor de θ é utilizado no treinamento da rede, tal como o exemplo:

Função de ativação (FA) para duas entradas (x_1 e x_2): $1 \times 0 + 1 \times 0 = 0$; $\theta = 0,5$

Se $FA \leq 0,5 \rightarrow y = 0$ (erro!)

Se $FA > 0,5 \rightarrow y = 1$ (saída adequada)

O ajuste do peso é dado por:

$E = y_c - y_o$, onde E é o erro; y_c é a saída correta; y_o é a saída obtida;

$F = c.X.E$, onde F é o fator de correção; constante (0,5);

$W_{novo} = W_{antigo} + F$

Sendo assim, tomando-se o exemplo:

$E = 1 - 0 = 1$ (para x_1 e x_2)

$F = 0,5.1.1 = 0,5$ (para x_1 e x_2)

$W_{novo} = 0 + 0,5 = 0,5$ (para x_1 e x_2)

Função de ativação (FA) para duas entradas (x_1 e x_2): $1 \times 0,5 + 1 \times 0,5 = 1$

$FA > 0,5 \rightarrow y = 1$ (saída adequada)

Huamaní (2003) classifica os neurônios como “neurônios lógicos” *and* e *or*. O neurônio *and* (figura 12) efetua uma combinação das entradas x por intermédio do operador *or* sobre as conexões do neurônio. Os resultados são agregados utilizando-se o operador lógico *and*. A expressão a seguir representa as relações *and* e *or* do neurônio lógico *and*.

$$y = \text{AND} [(x_1 \text{ OR } w_1), \dots, (x_i \text{ OR } w_i), \dots, (x_n \text{ OR } w_n)]$$

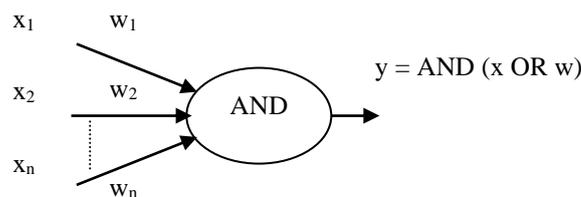


Figura 12 - Representação do Neurônio Lógico AND

Fonte: Huamaní (2003)

O neurônio lógico *or* (figura 13) atua na forma inversa do tipo *and*. A próxima expressão apresenta a relação entre os operadores lógicos *and* e *or* para este tipo de neurônio lógico.

$$y = \text{OR} [(x_1 \text{ AND } w_1), \dots, (x_i \text{ AND } w_i), \dots, (x_n \text{ AND } w_n)].$$

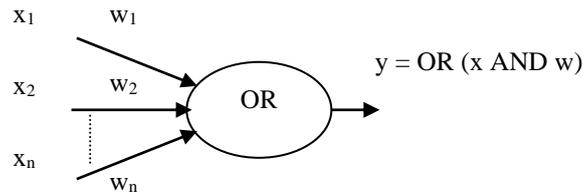


Figura 13 - Representação do Neurônio Lógico *OR* - Fonte: Huamaní (2003)

Pode-se unir a estrutura de redes neurais artificiais, formando um sistema híbrido denominado *Neuro-Fuzzy*, onde a principal vantagem é a possibilidade de “aprendizagem” do modelo e o processamento em camadas (redes neurais artificiais), e a utilização dos preceitos da Teoria *Fuzzy* no processamento interno de cada neurônio.

Segundo Souza (1999), os sistemas *Neuro-Fuzzy* estão entre os sistemas híbridos mais pesquisados na atualidade, pois associam as vantagens técnicas das Redes Neurais Artificiais (RNA) com as da Lógica *Fuzzy*, especificamente aos dos Sistemas de Inferência *Fuzzy*. Estes sistemas realizam, internamente, um mapeamento de regiões *Fuzzy* do espaço de entrada em regiões *Fuzzy* do espaço de saída por intermédio das regras *Fuzzy*.

De acordo com Oliveira *et al.* (s/d) os sistemas híbridos *Neuro-Fuzzy* são formados pelas três etapas do raciocínio *Fuzzy*, denominadas “camadas” (denominação oriunda da RNA), com as seguintes características (figura 14):

- ✓ Camada das Variáveis de Entrada ou de *Fuzzyficação*: representa as variáveis de entrada;
- ✓ Camada Intermediária (escondida): representa as regras do raciocínio *Fuzzy*;
- ✓ Camada das Variáveis de Saída ou de *Defuzzyficação*: representa as variáveis de saída.

O mesmo autor ressalta que um sistema *Neuro-Fuzzy* pode ser sempre interpretado como um sistema de regras *Fuzzy*, mas nem todos os modelos *Neuro-Fuzzy* especificam os procedimentos de aprendizagem para criação de regras *Fuzzy*.

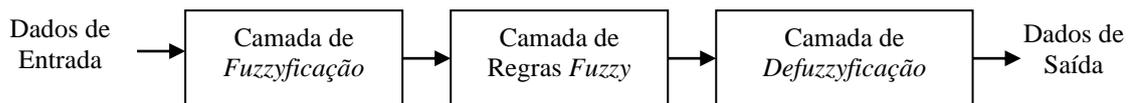


Figura 14 - Arquitetura Básica de um Sistema Neuro-*Fuzzy* - Fonte: Oliveira *et al.* (s/d)

Na figura 15 apresenta-se um exemplo onde estão explícitas as três camadas. Na primeira camada transformam-se as variáveis de entrada em variáveis *Fuzzy*. Nota-se, por exemplo, que a variável X_2 é submetida a uma função de pertinência, com três termos linguísticos, alto, médio e baixo, que recebem os graus de pertinência (notas) 0,3, 0,5 e 0,2, respectivamente. Com as variáveis de entrada *Fuzzyficadas*, passa-se à camada de regras, onde cada termo linguístico é avaliado em cada regra, ativando-as de acordo com a estrutura do antecedente. Cada antecedente e cada regra têm um peso relacionado, que no caso do “treinamento” deste sistema, serão adaptados para obter-se a modelagem correta. Após o processo de inferência, obtém-se as variáveis *Fuzzy*, que após a passagem pela camada de *Defuzzyficação*, obtém as variáveis de saída.

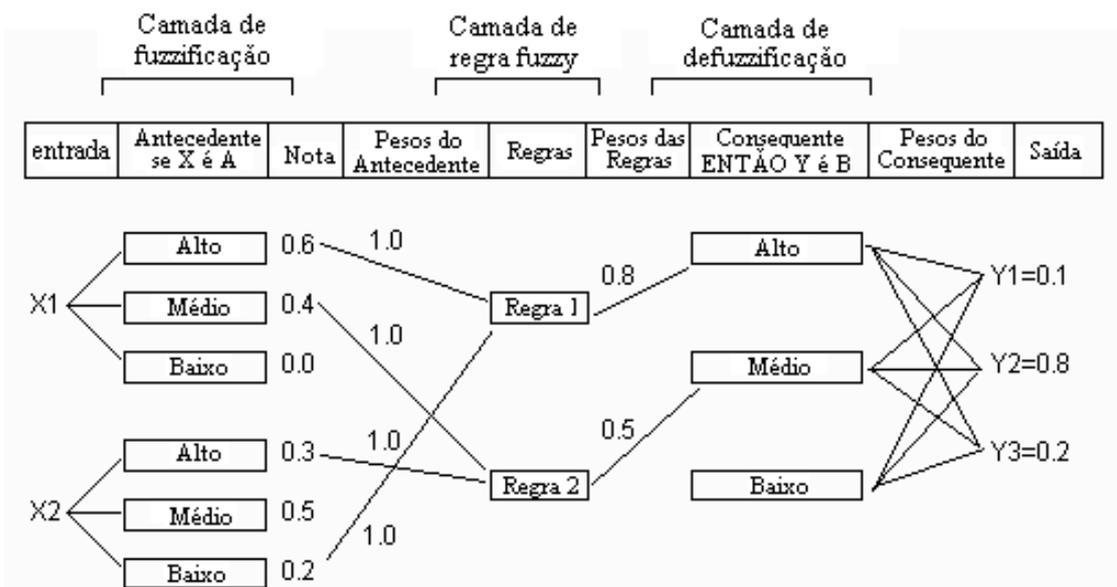


Figura 15 - Exemplo de um Sistema Neuro-*Fuzzy* - Fonte: Oliveira *et al.*(s/d)

Paiva (1999) apresenta uma estrutura denominada *Neural-Fuzzy Control Network* (NFCN) que é exemplificada por intermédio da figura 16, onde estão expostas duas variáveis de entrada e duas de saída, cinco camadas, além das três funções de

pertinência por variável linguística. A figura 17 apresenta uma estrutura genérica da NFCN (Lin (1995) *apud* Paiva (1999)).

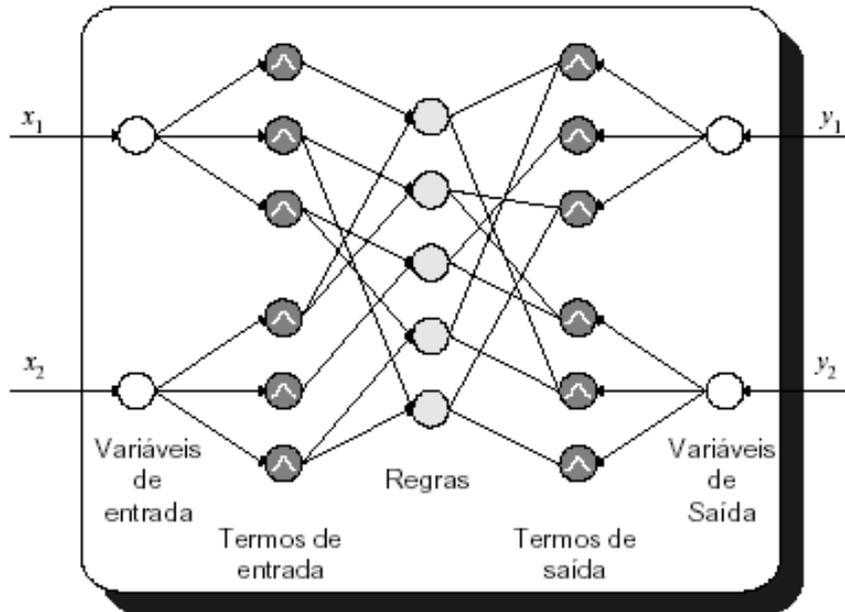


Figura 16 - Exemplo de uma estrutura NFCN - Fonte: Paiva (1999)

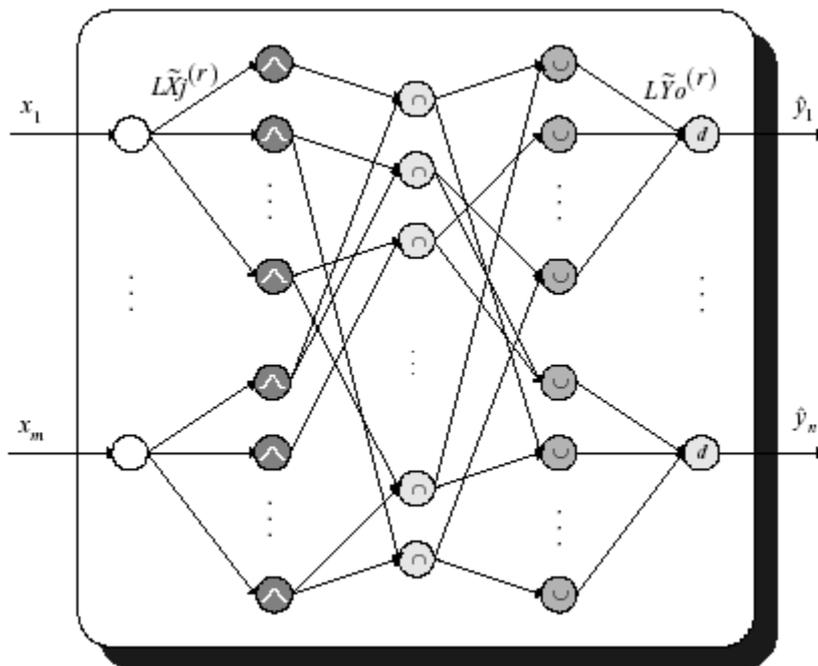


Figura 17 - Exemplo de uma estrutura genérica da NFCN
Fonte: Lin (1995) *apud* Paiva (1999)

Oliveira *et al.* (s/d) destacam um sistema, onde só existe uma saída, denominado Neuro-Fuzzy AND/OR, que segundo ele, foi originalmente proposto para problemas de classificação de padrões. Um exemplo deste sistema é apresentado na figura 18.

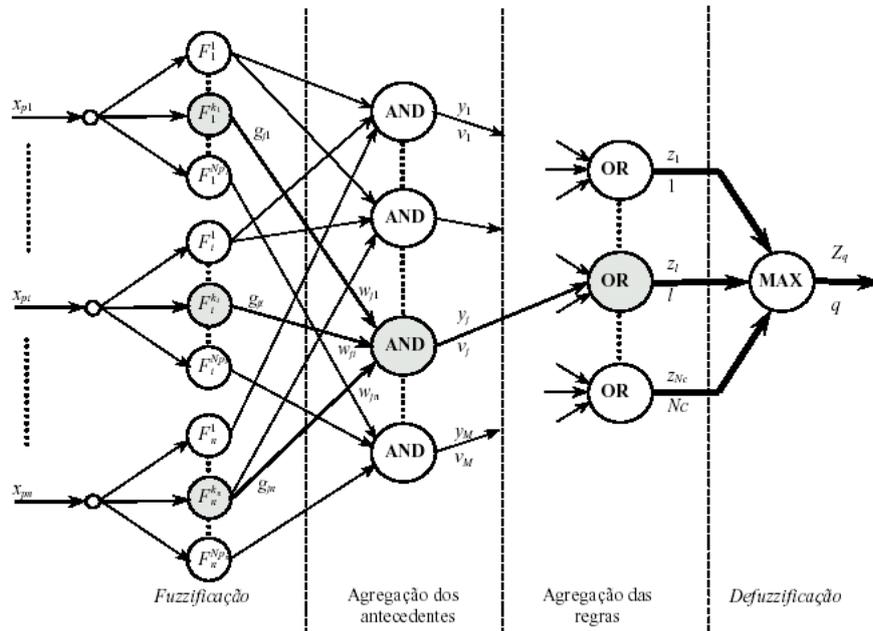


Figura 18 - Exemplo de um Sistema Neuro-Fuzzy - Fonte: Oliveira *et al.*(s/d)

Huamaní (2003) apresenta a rede Neuro-Fuzzy Estática (RNFEst), conforme apresentada na figura 19, onde o antecedente das regras define uma região Fuzzy, enquanto o consequente define a saída do sistema para esta região. Esta rede é caracterizada pela vantagem de utilização de normas triangulares.

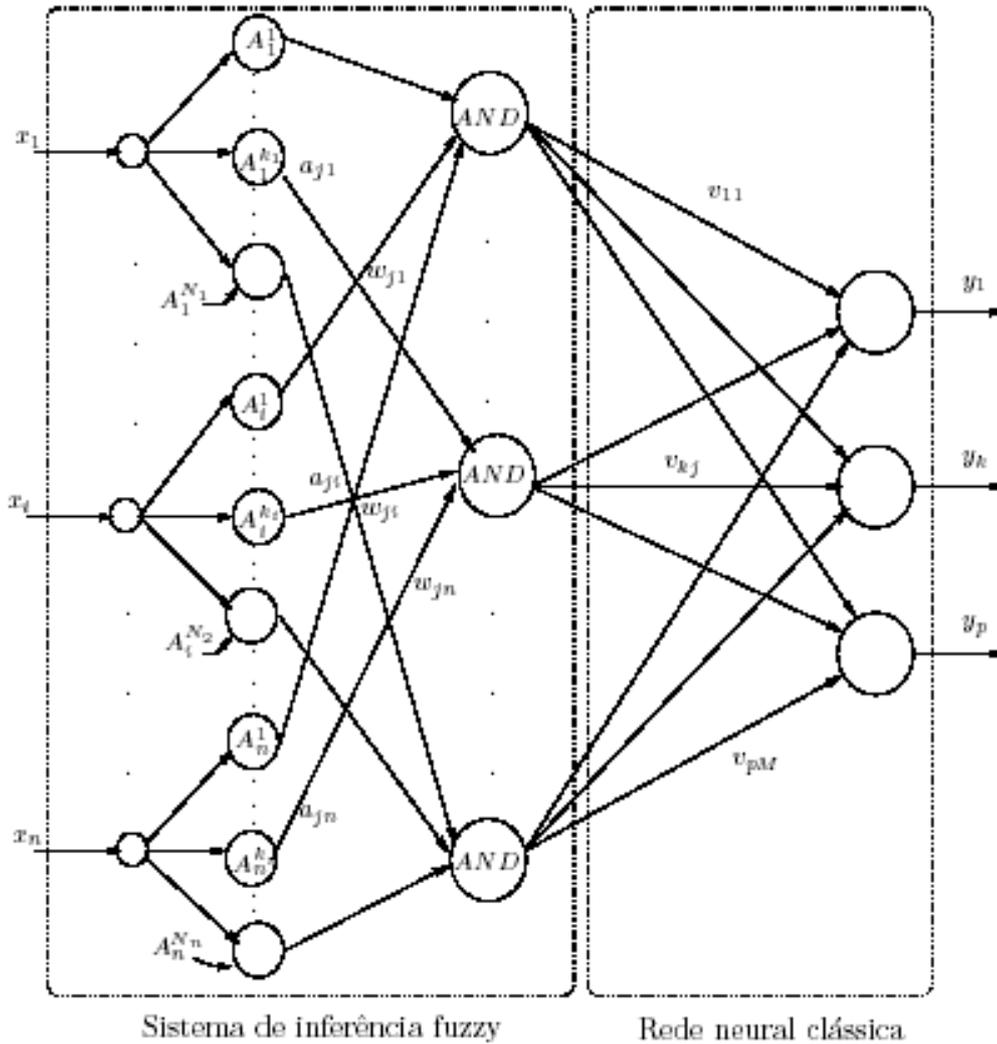


Figura 19 - Exemplo de uma arquitetura RNFEst - Fonte: Huamaní (2003)

Existem várias arquiteturas para sistemas Neuro-Fuzzy além das apresentadas, mas diferindo-se, principalmente, pelos processos de aprendizagem.

Bibliografia

Abar, Celina Aparecida Almeida Pereira **Noções de Lógica Matemática: O Conceito "Fuzzy"**, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Capturado de <http://www.pucsp.br/~logica/Fuzzy.htm>, Disponível em 05/12/2005, São Paulo, 2005.

Araújo, Augusto Guilherme. **Estimativa e Classificação do Solo pelo Tráfego de Máquinas Agrícolas Através da Modelagem Nebulosa**. 241 pgs., Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

Araújo, Augusto Guilherme. **Estimativa e Classificação do Solo pelo Tráfego de Máquinas Agrícolas Através da Modelagem Nebulosa**. 241 pgs., Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

Aurélio, Marco; Vellasco, Marley e Lopes, Carlos Henrique, **Descoberta de Conhecimento e Mineração de Dados**, ICA – Laboratório de Inteligência Computacional Aplicada, Departamento de Engenharia Elétrica, PUC–Rio, Rio de Janeiro, 1999.

Barbalho, Valéria Maria de Souza **Sistemas Baseados em Conhecimento e Lógica Difusa para Simulação do Processo Chuva-Vazão** Tese de Doutorado – Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, 94 pág., Rio de Janeiro, 2001.

Belchior, Arnaldo Dias; Xexéo Geraldo Braga e da Rocha, Ana Regina C., **Evaluating Software Quality Requirements using Fuzzy Theory**, Proceedings of ISAS 96, Orlando, 1996.

Bittencourt, Guilherme **Inteligência Artificial: ferramentas e teorias**, Editora UFSC, 2ª ed., 362 p., Florianópolis, 2001.

Ferreira, Antonio Sergio Seco; Ribas Neto, José de Barros e Ferreira, Lucas Conque Seco, **Um Modelo para Avaliação de Susceptibilidade de Entidades Públicas a Desvios Éticos**, Programa para a Promoção da Ética e de Fortalecimento Institucional da Corregedoria Geral da União, Brasília, 2002.

Huamaní, Ivette R. Luna, **Redes Neurais Fuzzy Aplicadas em Identificação e Controle de Sistemas**, Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Faculdade de Engenharia Elétrica e de

Computação, Departamento de Engenharia de Computação e Automação Industrial, Campinas, 2003.

Jafelice, Rosana Sueli da Motta; Barros, Laécio Carvalho de; Bassanezi, Rodney Carlos **Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações** – SBMAC – Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, São Carlos/São Paulo, ISBN 85-7651-020-0, 2005.

Lee, Chuen Chien **Fuzzy Logic in Control Systems: Fuzzy Logic Controller** - part I e II, IEEE Trans. Syst. Man, Cybern., vol. 20, no. 2, entre as páginas 404 e 435, 1990.

Li, Hong Xing and Yen, Vicent C. **Fuzzy Sets and Fuzzy Decision-making**, ISBN 0-8493-8931-3, CRC Press, USA, 1995.

Lopes, Wanda Aparecida; Jafelice, Rosana Sueli da Motta; Barros, Laécio Carvalho de. **Modelagem Fuzzy de Diagnóstico Médico e Monitoramento do Tratamento da Pneumonia**, Revista Biomatemática, Vol.15, pag.77-96, ISSN 1679-365X, IMECC – UNICAMP, 2005.

Mandani, E. H. e S. Assilian. **An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller International**. Journal of Man-Machine Studies, v.7, n.1, 1975.

Macedo, Perseu Padre de. **Modelo multicritério fuzzy para melhoria da eficiência energética**. 96 folhas, Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Pernambuco. 2015.

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, 2015.

Medeiros, Anderson V. de; Souza, Francisco Elvis C. e Maitelli, André L. **Implementação de Um Sistema de Extração de Conhecimento de Redes Neurofuzzy**, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, II Workshop Técnico Científico do DIMAp, 2003.

Melo, Hiran de. **Sistema de Previsão Inteligente Aplicado à Identificação de Parâmetros em Estruturas Flexíveis**, Tese de Doutorado, Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2002.

Oliveira Jr., Hime Aguiar. **Lógica Difusa – Aspectos Práticos e Aplicações**. 192 pgs. Editora Interciência, Rio de Janeiro, 1999.

Ortega, Neli Regina Siqueira. **Aplicação da Teoria de Conjuntos Fuzzy a Problemas da Biomedicina**. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, Instituto de Física, São Paulo, 2001.

Paiva, Rui Pedro Pinto de Carvalho, **Identificação Neuro-Difusa Aspectos de Interpretabilidade**, Dissertação de Mestrado em Engenharia Informática, Departamento de Engenharia Informática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, Coimbra, 1999.

Rheingantz, Paulo Afonso, **Lógica Fuzzy e Variáveis Lingüísticas Aplicadas na Avaliação de Desempenho de Edifícios de Escritório**, Associação Nacional de Tecnologia do Ambiente Construído, Porto Alegre, Vol. 2, Nº 3, p. 41-55, 2002.

Rodrigues, Fabio Zafallon e Santos, Silvio Aparecido, **A Lógica Fuzzy na Administração de Empresas**, VII Seminários de Administração da USP – SEMEAD, São Paulo, 2004.

Ross, Timothy J. **Fuzzy logic with engineering applications** 3rd ed. ISBN 978-0-470-74376-8, John Wiley & Sons, 2010.

Russell, Stuart Jonathan **Inteligência Artificial** 3ª ed., Ed. Elsevier, Rio de Janeiro, 2013.

Sandri, Sandra e Correa, Cláudio. **Lógica Nebulosa**. Instituto Tecnológico da Aeronáutica – ITA, V Escola de Redes Neurais, pp. C073-c090, São José dos Campos, 1999.

Shaw, Ian S. e Simões, Marcelo Godoy. **Controle e Modelagem Fuzzy**. 165 pags. Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1999.

Silva, Marco Antonio Batista da. **Sistema de Classificação Fuzzy para Áreas Contaminadas**. Tese de Doutorado em Engenharia Civil. COPPE/UFRJ, 221pgs., Rio de Janeiro, 2005.

Souza, Flávio Joaquim de, **Modelos Neuro-Fuzzy Hierárquicos**, Tese de Doutorado, Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica – RJ, Rio de Janeiro, 1999.

Tanaka, Kazuo, **An Introduction to Fuzzy Logic for Practical Applications**. Ed.Springer, Nova York, 1997.

Tanscheit, Ricardo, **Fundamentos de Lógica Fuzzy e Controle Fuzzy**, Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica – RJ, Rio de Janeiro, 2002.

Tatibana, Cássia Yuri e Kaetsu, Deise Yuki, **Redes Neurais**, Universidade Estadual de Maringá, Departamento de Informática, Grupo de Sistemas Inteligentes, Capturado de <http://www.din.uem.br/ia/neurais>, Disponível em 16/02/2006, Paraná.

Thé, Maria Alice Lagos. **Raciocínio Baseado em Casos – Uma Abordagem Fuzzy para o Diagnóstico Nutricional**, Tese de Doutorado em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, 182 pgs., Florianópolis, 2001.

Thompson, Carlos A; Friaes, Marly Martins e Caetano, Fábio Massaúd. **Sistemas Especialistas: Lógica Fuzzy Aplicada na Análise de Portfólios**. Universidade Cândido Mendes, Rio de Janeiro, 2005.

UFBA, **Lógica Fuzzy**, Universidade Federal da Bahia – Instituto de Matemática – Apontamentos de Lógica Fuzzy – Disponível em <http://led.ufba.br/algebra1a/trab6/index.html>, Capturado em 21/06/2001.

USP, **Lógica Fuzzy**, Universidade de São Paulo – Laboratório de Processamento de Sinais – Núcleo de Estudos em Otimização, Disponível em <http://voz1.lps.usp.br/neo/fuzzy/>, Capturado em 21/06/2001.

Vanderlei Filho, Domingos; Valença, Mêuser Jorge Silva; Ludermir, Teresa Bernarda e Silva, Giane da Paz Ferreira, **Uma Proposta Fuzzy na Avaliação de Desempenho de Bibliotecas Universitárias Brasileiras**, XII Seminário Nacional de Bibliotecas Universitárias, Pernambuco, 2002.

Vargens, José M.; Tanscheit, Ricardo e Vellasco, Marley M.B.R.. **Previsão de Produção Agrícola Baseada em Regras Lingüísticas e Lógica Fuzzy**. Revista Controle & Automação, Vol.14, Número 2, 2003.

Xu, Dong; Keller, James M.; Popescu, Mihail; Bondugula, Rajkumar **Applications of Fuzzy Logic In Bioinformatics**, University of Missouri-Columbia-USA, Series on Advances in Bioinformatics and Computational Biology – Volume 9, ISBN-10 1-84816-258-8, Imperial College Press, 2008.